ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Δίνεται ακόμη το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

(α) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

(β) Να γράψετε το $\vec{\delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

(γ) Να βρείτε το $|\vec{\delta}|$.

(δ) Να αποδείξετε ότι $\vec{\delta}\perp\vec{\alpha}$.

2. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x+(\lambda-1)y-(\lambda+5)=0 \qquad (1)$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο Μ το οποίο και να βρείτε.

(γ) Αν ε_1 είναι η ευθεία που ορίζεται από την οικογένεια ευθειών (1) για $\lambda=0$, να βρείτε την απόσταση του σημείου $\text{Α}(4,-2)$ από αυτή.

(δ) Να βρείτε ποια ευθεία από την οικογένεια ευθειών (1) είναι παράλληλη προς τον $x'x$.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-6x+2y+1=0$.

(α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\text{Μ}(4,-2)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ και τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β έτσι, ώστε το Μ να είναι το μέσο του ΑΒ.

(δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που φέρουμε από το σημείο $\Delta(0,2)$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$, το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: x-4y=2$, $\varepsilon_2: 2|\vec{\alpha}|x+y=5$, $\varepsilon_3: 4|\vec{\beta}|x+y=-3$. Αν $\varepsilon_1\perp\varepsilon_3$ και $\varepsilon_2\parallel\varepsilon_3$ να βρείτε:

(α) τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$.

(β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

5. Δίνονται τα σημεία $\text{Α}(1,3)$, $\text{Β}(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+y+\alpha=0$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

(α) Αν η απόσταση του Α από το Β είναι ίση με την απόσταση του Α από την ευθεία ε να βρείτε την τιμή του α.

(β) Για $\alpha=4$ να βρείτε:

  i. τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

  ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\lambda x+2(\lambda+1)y+4\lambda^2+2\lambda=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

(γ) Για $\lambda=1$ να αποδείξετε ότι η ευθεία $x+y-2=0$ εφάπτεται του κύκλου.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-4,5)$ και $\vec{\beta}=(8,-1)$.
(α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.
(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.
(γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{v}$ με τον άξονα $x'x$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}(5,2)$, $\mathrm{B}(-1,0)$ και $\Gamma(-3,4)$. Να βρείτε:
(α) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ.
(β) την εξίσωση του ύψους ΒΔ.
(γ) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
(δ) το σημείο $\mathrm{K}(x_0,2)$, εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, τέτοιο, ώστε να ισχύει $(\mathrm{KAB})=2$ τ.μ.

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(\eta\mu^2\theta)x-2y\eta\mu\theta-1=0$ (1), όπου $\theta\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα ως συνάρτηση του θ.
(β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (1) ανήκουν σε παραβολή.
(γ) Να βρείτε τις εστίες Ε΄ και Ε καθώς και την εκκεντρότητα της έλλειψης $C_1: 2x^2+y^2=4$.
(δ) Να βρείτε τα σημεία Μ της παραβολής $C_2: y^2=2x$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\left|\overrightarrow{\mathrm{ME}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{ME}'}\right|=4$, όπου Ε, Ε΄ οι εστίες της έλλειψης C_1.

10. Δίνεται η ευθεία ε_1 με εξίσωση $x+2y-3=0$.
(α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε_1.
(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε_2 που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(5,-6)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 είναι $2x-y-16=0$.
(γ) Να βρείτε το σημείο τομής Β των ευθειών ε_1 και ε_2 και το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία ε_1.

11. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(1,-\sqrt{3})$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $\left|\vec{\beta}\right|=1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}\right|=2$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$.
(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$.
(γ) Έστω Α, Β δύο σημεία του επιπέδου με $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.
   i. Να υπολογίσετε το $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$.
   ii. Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}^2-\frac{13}{4}$ και να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\frac{3}{4}$.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\lambda^2x+2\lambda y+4\lambda^4-1=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)
(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ με κέντρο $\mathrm{K}(2\lambda^2,-\lambda)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$.

(β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και την διευθετούσα.
(γ) Από όλους τους κύκλους της εξίσωσης (1) να αποδείξετε ότι εκείνος που εφάπτεται στην ευθεία $y+1=0$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.
(δ) Αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του μοναδιαίου κύκλου με τους ημιάξονες $\mathrm{O}y', \mathrm{O}y$ αντίστοιχα και Μ τυχαίο σημείο του κύκλου αυτού να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}^2=4$.

13. (α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων που διέρχεται από το σημείο
$\mathrm{A}(1,1)$ είναι $x^2+y^2=2$.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του παραπάνω κύκλου στο σημείο Α.
(γ) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

14. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(4,0)$, $\Gamma(3,2)$.
(α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.
(β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.
(γ) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ πάνω στο $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. ($\text{προβ}_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$)
(δ) Να υπολογίσετε τον εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

15. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x+(\lambda-1)y+\lambda+3=0$, (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.
(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία.
(β) Ποια ευθεία από την εξίσωση (1) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$;
(γ) Να βρείτε την προβολή του σημείου $\mathrm{B}(3,-1)$ στην ευθεία που βρήκατε στο ερώτημα (β).

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$, $\vec{\beta}=(0,1)$ και $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:
(α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.
(β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.
(γ) την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. ($\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$)

17. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+2)x+(\alpha+1)y=2\alpha+3$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $\mathrm{A}(2,-3)$.
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία.
(β) Έστω ε η ευθεία που προκύπτει από την εξίσωση για $\alpha=1$.
i. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε.

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\alpha x+4\alpha y-20=0$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
(β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση για $\alpha=0$.
i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του $\mathrm{A}(2,4)$.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το σημείο $\mathrm{M}(1,2)$.

19. Δίνεται η ευθεία ε: $\lambda x+(\lambda+1)y-4=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{N}^*$.

(α) Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}=\left(\frac{\kappa}{\lambda},-\lambda\right)$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός κ είναι άρτιος.
(β) Για ποια τιμή του λ η ευθεία ε τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ να είναι 4 τ.μ.

20. Δίνεται η ευθεία ε: $(2\lambda+1)x+(\lambda-1)y-3\lambda=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:
(α) για ποια τιμή του λ η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^{o}.
(β) για ποια τιμή του λ η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία $y=2x-3$.
(γ) για ποια τιμή του λ η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,1)$.
(δ) για ποιες τιμές του λ η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(2,\lambda)$.

21. Δίνονται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=5$ και η παραβολή $C_2: y^2=4x$.
(α) Να βρεθούν τα κοινά σημεία Α και Β του κύκλου και της παραβολής.
(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από την εστία Ε της παραβολής.
(γ) Στο σημείο Α φέρουμε την εφαπτομένη ε της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο τομής Δ της διευθετούσας της παραβολής με τον άξονα $x'x$.
(δ) Να βρείτε τον κύκλο διαμέτρου ΑΕ και να αποδείξετε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται από το σημείο τομής Γ της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
(α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.
(β) $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$.
(γ) $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$.

23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $\mathrm{A}(-1,2)$, $\mathrm{B}(3,-2)$ και $\Gamma(1,4)$. Να βρείτε:
(α) την εξίσωση του ύψους ΒΕ.
(β) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
(γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΜΓΕ.

24. Δίνεται η εξίσωση $(x+1)^2+(y-2)^2=\lambda(2x+y)$, (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}^*$.
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}^*$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
(β) Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος που ορίζεται από την (1) εφάπτεται της ευθείας $y=-2x$.
(γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1).

25. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(1,8-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)$ και $\vec{\beta}=\left(2,\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\vec{\beta}\right|\right)$.
(α) Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\beta}\right|=\sqrt{5}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5$.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

26. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + 2 = 0$ με $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} \neq 0$ και το σημείο $\mathrm{P}(-\mathrm{B},\mathrm{A})$. Φέρνουμε την PK κάθετη στην ευθεία ε.
(α) Να βρείτε την απόσταση του P από την ευθεία ε.
(β) Αν $\mathrm{M}(x,y)$ είναι ένα σημείο της ευθείας ε, να αποδείξετε ότι:
$$(x+\mathrm{B})^2 + (y-\mathrm{A})^2 \geq \frac{4}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}.$$
(γ) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \parallel \varepsilon$ και $(\mathrm{OPK}) = 1$ τ.μ.
(δ) Για το τυχαίο σημείο M της ευθείας ε, να υπολογίσετε το (OPM).

27. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-2,5)$, $\mathrm{B}(2,3)$ και ο κύκλος $\mathrm{C}: x^2 + (y+1)^2 = 5$.
(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο B, είναι τέμνουσα του κύκλου C και το μήκος της χορδής που δημιουργεί στον κύκλο C είναι 2.
(β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C' ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και το κέντρο του βρίσκεται πάνω στον κύκλο C.

28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda-1)x + (\lambda+3)y + 2 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.
(β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου ως συνάρτηση του λ.
(γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.
(δ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο A και να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

29. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.
(α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{w}$ παράλληλο στο $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, ώστε το $\vec{w}-\vec{\beta}$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.
(β) Έστω $\vec{u} = \vec{\alpha} + x\vec{\beta}$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
i. Να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει $\vec{u} \perp \vec{v}$.
ii. Έστω Ε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά το διάνυσμα $\vec{u}+\vec{v}$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E} \geq \frac{27}{4}$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο το Ε παίρνει την ελάχιστη τιμή.

30. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$ παριστάνει δύο κάθετες ευθείες και να
βρείτε το σημείο τομής τους.
(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 2xy = 5$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και να βρείτε την μεταξύ τους απόσταση.
(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 - y^2 - xy + x + 5y - 6 = 0$ παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες.

31. Δίνεται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ με εστίες Ε και Ε΄.

(α) Αν μια ευθεία διέρχεται από την εστία Ε΄ και τέμνει την έλλειψη στα Β, Γ να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΕΒΓ.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2 η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την C_1 και εκκεντρότητα ίση με 2.

(γ) Θεωρούμε την εφαπτομένη (ε) της υπερβολής C_2 σε τυχαίο σημείο της $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ διαφορετικό από τις κορυφές της και την κάθετη (η) στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο Μ. Αν οι ευθείες (ε) και (η) τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία Κ και Λ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{OK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}} = 16$.

32. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ με εστία Ε και η ευθεία $\varepsilon : \frac{x}{3}-\frac{y}{4}+1=0$.

(α) Να βρείτε το σημείο $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ με $y_1 > 0$ της παραβολής, ώστε αν Α είναι η προβολή του στη διευθετούσα, να ισχύει $(\mathrm{MAE}) = \frac{5}{8}$.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση d τυχαίου σημείου της παραβολής από την ευθεία, ως συνάρτηση της τεταγμένης του σημείου.

(γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής το οποίο είναι πλησιέστερο στην ε.

33. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ και το σημείο της $\mathrm{P}(x_1, 3)$ με $x_1 > 0$.

(α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο Ρ καθώς και την κάθετη (η) στην εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των προβολών Μ και Ν της εστίας Ε της έλλειψης πάνω στις ευθείες (ε) και (η) αντίστοιχα.

(γ) Να αποδείξετε ότι τα Ο, Μ, Ν είναι συνευθειακά και $(\mathrm{MNE}) = 3(\mathrm{ONE})$.

(δ) Αν για τους αριθμούς x_1, x_2, y_1, y_2 ισχύει $3x_1^2+4y_1^2 = 3x_2^2+4y_2^2 = 48$, να αποδείξετε ότι $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \le 64$

Απαντήσεις

1. (α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$, (β) $\vec{\delta}=2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$, (γ) $\left|\vec{\delta}\right|=2\sqrt{3}$.
2. (β) $\mathrm{M}(2,-1)$, (γ) $d(\mathrm{A},\varepsilon_1)=\sqrt{5}$, (δ) για $\lambda=-2$: $y=-1$.
3. (α) $\mathrm{K}(3,-1)$, $\rho=3$, (β) $(\mathrm{KM})=\sqrt{2}<\rho$, (γ) $y=x-6$, (δ) $y=2$, $x=0$.
4. (α) $\left|\vec{\alpha}\right|=2$, $\left|\vec{\beta}\right|=1$, $\left|\vec{\gamma}\right|=2\sqrt{3}$, (β) $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-3$.
5. (α) $\alpha=4$ ή $\alpha=-16$, (β) $\Gamma(0,-4)$, $(\mathrm{AB\Gamma})=10$.
6. (α) $\mathrm{K}(2\lambda,-\lambda-1)$, $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$, (β) $x+2y+2=0$.
7. (α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-37$, (β) $\vec{v}=(4,4)$, (γ) $\dfrac{\pi}{4}$.
8. (α) $x+4y-13=0$, (β) $y=4x+4$, (γ) $y=2$, (δ) $\mathrm{K}(3,2)$.
9. (α) $\mathrm{K}\left(\dfrac{\eta\mu^2\theta}{2},\eta\mu\theta\right)$, $\rho=\eta\mu^2\theta+2$, (β) $y^2=2x$, (γ) $\mathrm{E}(0,\sqrt{2})$, $\mathrm{E}'(0,-\sqrt{2})$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
   (δ) $(1,\sqrt{2})$, $(1,-\sqrt{2})$.
10. (α) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, (γ) $\mathrm{B}(7,-2)$, $\mathrm{A}'(9,2)$.
11. (β) $\dfrac{5\pi}{3}$, (γ) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{13}$, είναι κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα 2.
12. (β) εστία $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{8},0\right)$, διευθετούσα $x=-\dfrac{1}{8}$.
13. (β) $x+y=2$, (γ) $(2,0)$, $(0,2)$.
14. (α) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(3,0)$, (β) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=12$, (γ) $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, (δ) $(\mathrm{AB\Gamma})=3$.
15. (α) $\lambda\neq 1$, (β) Για $\lambda=-1$: $y=x+1$, (γ) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.
16. (α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$, (β) $\left|\vec{\gamma}\right|=1$, (γ) $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$.
17. (β) $d(\mathrm{A},\varepsilon)=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$, $3x+2y=0$.
18. (α) $\mathrm{K}(\alpha,-2\alpha)$, $\rho=\sqrt{5(\alpha^2+4)}$, (β) i. $x+2y=10$, ii. $x+2y=5$.
19. (α) $\kappa=\lambda(\lambda+1)$, (β) $\mathrm{A}\left(\dfrac{4}{\lambda},0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\dfrac{4}{\lambda+1}\right)$, $\lambda=1$.
20. (α) $\lambda=0$, (β) $\lambda=-1$, (γ) $\lambda\in\mathbb{R}$, (δ) $\lambda=-1$ ή $\lambda=-2$.
21. (α) $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(1,-2)$, (β) $\mathrm{E}(1,0)$, (γ) η $y=x+1$ διέρχεται από το $(-1,0)$,
    (δ) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $\Gamma(0,1)$.
22. (α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$, (β) $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=1$, (γ) $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=2$.
23. (α) $x+y=1$, (β) $x+3y-5=0$, (γ) $(\mathrm{M\Gamma E})=4$.
24. (α) $\mathrm{K}\left(\lambda-1,\dfrac{\lambda+4}{2}\right)$, $\rho=\dfrac{\sqrt{5\lambda^2}}{2}$, (γ) $x-2y+5=0$.

25. (β) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

26. (α) $d(\mathrm{P},\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$ (δ) $(\mathrm{OPM})=1$.

27. (α) $y-3=\frac{3}{4}(x-2)$ ή $x=2$ (β) $(x+2)^2+y^2=25$.

28. (α) $\lambda\neq-1$ (β) $\mathrm{K}\left(-\frac{\lambda-1}{2},-\frac{\lambda+3}{2}\right)$ και $\rho=\frac{|\lambda+1|}{2}$ (γ) $y=x-2$

(δ) $\mathrm{A}(1,-1)$, $y=-x$.

29. (α) $\vec{w}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ (β) i. $x=-\frac{5}{4}$ ii, $\vec{u}=\vec{\alpha}-\frac{5}{2}\vec{\beta}$.

30. (α) $(-1,0)$ (β) $3\sqrt{2}$.

31. (α) 20 (β) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

32. (α) $\mathrm{M}\left(\frac{1}{4},1\right)$ (β) $d=\frac{1}{5}(y_1^2-3y_1+12)$ (γ) $\left(\frac{9}{16},\frac{3}{2}\right)$.

33. (α) $\varepsilon: x+2y=8$, $\eta: y=2x-1$ (β) $\mathrm{M}\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$ $\mathrm{N}\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.