

## 2. Συντεταγμένες στο επίπεδο

- Δίνεται το σημείο  $A(-2, 4)$ .
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $B$ , ώστε  $\overline{AB} = (-1, 6)$ .
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$ , ώστε  $\overline{\Gamma A} = (4, 0)$ .
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Delta$ , ώστε  $\overline{A\Delta} = 2\overline{AB}$ .
- Δίνονται τα σημεία  $A(3, -2)$ ,  $B(1, -3)$  και  $\Gamma(2, -4)$ .
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$ ,  $\overline{B\Gamma}$ ,  $\overline{A\Gamma}$ .
  - Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma$  είναι τρίγωνο και ότι είναι ισοσκελές.
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $B\Gamma$ .
  - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Δίνεται το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με κορυφές  $A(1, 2)$ ,  $B(7, -1)$ ,  $\Gamma(4, -7)$  και  $\Delta(-2, -4)$ .
  - Να αποδείξετε ότι οι πλευρές  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  είναι ίσες και παράλληλες.
  - Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.
  - Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ ;
- Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (4, -2)$ ,  $\vec{\beta} = (1, 3)$ ,  $\vec{\gamma} = (\kappa, \lambda)$ ,  $\vec{\delta} = (2, -1)$   $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}$  ως συνάρτηση των  $\kappa, \lambda$ .
  - Να βρείτε για ποιες τιμές των  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  είναι:
    - $\vec{u} = \vec{0}$
    - $\vec{u} // x'x$
    - $\vec{u} // y'y$
    - $\vec{u} = 2\vec{\delta}$
- Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{OA} = (2, 1)$ ,  $\overline{OB} = (-2, 3)$  και  $\overline{OG} = (6, -1)$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.
  - Να εκφράσετε το διάνυσμα  $\overline{OB}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overline{OA}$  και  $\overline{OG}$ .
  - Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά.
  - Να αποδείξετε ότι το  $A$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ .
  - Αν  $\Delta$  είναι το μέσο του  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\overline{O\Delta} = \frac{1}{4}(\overline{OB} + 3\overline{OG})$ .
- Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $\vec{\gamma} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ .
  - Να βρείτε τον αριθμό  $\kappa$  για τον οποίο ισχύει  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + \kappa\vec{\gamma} = \vec{0}$ .
  - Να γράψετε το  $\vec{\gamma}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .
  - Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το  $\vec{\alpha} + \frac{3}{2}\vec{\beta}$ .
- Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A(2, 1)$ ,  $B(5, 0)$  και  $\Gamma(2, -3)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες
  - της κορυφής  $\Delta$ .
  - του κέντρου  $K$  του παραλληλογράμμου.
- Δίνονται τα σημεία  $A(2, 4)$ ,  $B(-1, 1)$  και  $\Gamma(4, 0)$ .
  - Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου.

- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ.
9. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x, x-2)$  και  $\vec{\beta} = (9, x)$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  είναι ομόρροπα τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ .
10. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τα σημεία Κ(2,1) και Λ(6,3) στο εσωτερικό του, ώστε  $AK = KL = LB$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Β.
11. Δίνονται τα σημεία Α(-1,-1) και Β(3,3).  
(α) Να βρείτε τα σημεία Μ, Ν των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα, ώστε το καθένα να ισαπέχει από τα Α και Β.  
(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΝ είναι ρόμβος.
12. Δίνονται τα σημεία Α(0,2), Β $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$  και Γ(-1,2).  
(α) Να βρείτε σημείο Δ, ώστε να ισχύει  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ .  
(β) Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Γ, Δ είναι συνευθειακά.  
(γ) Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα  $y'y$ , το οποίο ισαπέχει από τα Α και Δ.
13. Δίνονται τα σημεία Α(-1,4), Β(2,2), Γ(3,-3) και Δ(-6,3).  
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{\Delta\Lambda}$ .  
(β) Να βρείτε τα μέτρα και τους συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{\Delta\Lambda}$ .  
(γ) Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ;
14. Αν τα σημεία Μ(-1,2), Ν(4,4) και Ρ(2,5) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ. (Υπόδειξη: Το τετράπλευρο ΜΒΝΡ είναι παραλληλόγραμμο.)
15. Δίνονται τα σημεία Α(-1,1) και Β(3,3).  
(α) Να βρείτε τα σημεία Γ και Δ, για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις  $\overrightarrow{O\Gamma} = 2\overrightarrow{O\Lambda}$  και  $\overrightarrow{O\Delta} = 2\overrightarrow{O\Lambda}$ , όπου Ο η αρχή των αξόνων.  
(β) Να βρείτε σημείο Μ, ώστε να ισχύει  $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{MB}$ .  
(γ) Να εκφράσετε το διάνυσμα  $\overrightarrow{OM}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $\overrightarrow{O\Gamma}$  και  $\overrightarrow{O\Delta}$ .
16. Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(-1,-3), Γ(5,9) και Δ( $\alpha^2+1, 2\alpha^2+1$ ),  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι συνευθειακά για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
(β) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ για τον οποίο ισχύει  $\overrightarrow{B\Gamma} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ .  
(γ) Αν το Α είναι το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι το Δ είναι το μέσο του ΑΓ.
17. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(1,-2) και Δ(2,2). Αν η κορυφή Β βρίσκεται στον άξονα  $x'x$  και το κέντρο του παραλληλογράμμου στον άξονα  $y'y$  να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

18. Δίνονται τα σημεία  $A(-1, 2)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $\Gamma(2, 4)$  και τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\kappa, 3)$ ,  $\vec{\beta} = (-2, \lambda)$ . Να βρείτε:
- (α) τις συντεταγμένες και τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\gamma} = 2\vec{AB} + 3\vec{A\Gamma}$  και  $\vec{\delta} = 2\vec{AB} - 3\vec{A\Gamma}$ .
- (β) τις τιμές των  $\kappa, \lambda$ , ώστε να είναι  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} \parallel \vec{\delta}$ .
- (γ) διάνυσμα  $\vec{\alpha}_1$  ομόρροπο του  $\vec{\gamma}$  και διάνυσμα  $\vec{\beta}_1$  αντίρροπο του  $\vec{\delta}$ , ώστε  $|\vec{\alpha}_1| = 2|\vec{\gamma}|$  και  $|\vec{\beta}_1| = 3|\vec{\delta}|$ .
19. Δίνονται τα σημεία  $A(3, 2)$ ,  $B(1, -1)$  και  $\Gamma(7, -1)$ .
- (α) Να βρείτε τα σημεία  $\Delta, E$ , ώστε  $\vec{PE} = \frac{2}{3}\vec{PA}$  και  $\vec{B\Delta} = \frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$ .
- (β) Αν  $M$  είναι το σημείο τομής των  $A\Delta, BE$  να εκφράσετε το διάνυσμα  $\vec{GM}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{AB}$  και  $\vec{A\Gamma}$ .
20. Δίνεται το παραλληλόγραμμο  $OAB\Gamma$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, με  $A(4, -1)$  και  $B(5, 2)$ .
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$ .
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του παραλληλογράμμου.
- (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $E$  της πλευράς  $AB$  που βρίσκεται στον άξονα  $x'x$ .
- (δ) Δίνεται το σημείο  $\Delta(\alpha + 1, 2 - \alpha)$ . Να βρείτε για ποια τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  τα σημεία  $O, A, \Delta$  είναι συνευθειακά.
21. Δίνονται τα σημεία  $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ ,  $B(2, -1)$  και  $M\left(\alpha, \frac{\alpha - 4}{2}\right)$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, M$  είναι συνευθειακά, για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (β) Αν  $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ .
- (γ) Να αποδείξετε ότι  $|\vec{OM}| \geq \frac{4\sqrt{5}}{5}$ , για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.
22. Δίνονται τα σημεία  $A(x - y, y)$  και  $B(2x + y, 2y)$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τα  $x, y$  ώστε το διάνυσμα  $\vec{AB}$  να έχει μέτρο 2 και να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ .
23. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, -3)$  και  $\vec{\beta} = (1, 4)$ . Θεωρούμε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  ώστε  $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  και  $\vec{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ . Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{B\Gamma}$ .
24. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, 3)$ .
- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{u} = -10\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}$  καθώς και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ .
- (β) Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{v} = (8, 13)$  σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο  $\vec{\alpha}$  και η άλλη στο  $\vec{\beta}$ .

25. Δίνονται τα σημεία  $A(1,3)$  και  $B(3,2)$ .
- (α) Αν  $M(x, y)$  και  $\overline{AM} \parallel \overline{AB}$ , να αποδείξετε ότι  $x + 2y = 7$ .
  - (β) Αν  $\overline{AN} = 2\overline{NB}$ , να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου  $N$ .
26. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (2, -3)$  και  $\vec{b} = (1, 4)$ . Να εκφράσετε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (2, -14)$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ .
27. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (2, -3)$ ,  $\vec{b} = (1, 4)$ ,  $\vec{\gamma} = (1, -5)$  και  $\vec{\delta} = \vec{a} + \kappa\vec{b} + \vec{\gamma}$ . Να βρείτε την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$ , ώστε
- (α) το διάνυσμα  $\vec{\delta}$  να είναι παράλληλο στον άξονα  $x'x$ .
  - (β) το διάνυσμα  $\vec{\delta}$  να είναι παράλληλο στον άξονα  $y'y$ .
28. Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A(-4, 2)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $\Gamma(3, -5)$  και  $\Delta(-7, -3)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $M$  των διαγωνίων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ .
29. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\overline{AB} = (3, -2)$  και  $\overline{A\Gamma} = (-2, 4)$ . Να βρείτε το μήκος της διαμέσου  $BM$ .
30. Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 3)$ ,  $B(4, 1)$  και  $\Gamma(0, -3)$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι τα  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου.
  - (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $AB$  και του μέσου  $N$  του  $B\Gamma$ .
  - (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Delta$ , ώστε  $\overline{A\Delta} = 2\overline{MN}$ .
  - (δ) Να βρείτε τα μήκη της πλευράς  $AB$  και της διαμέσου  $\Gamma M$ .
  - (ε) Να γράψετε το  $\overline{\Gamma M}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overline{AB}$  και  $\overline{A\Gamma}$ .
31. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (2\kappa, \kappa + 1)$  και  $\vec{b} = (\lambda - 1, \lambda + 3)$  με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .
- (α) Αν  $\kappa = 2$  και  $\lambda = 3$  να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{a} - \vec{b}$  και  $2\vec{a} + \vec{b}$ .
  - (β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\kappa$  είναι  $\vec{a} = (2, 2)$ .
  - (γ) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  το διάνυσμα  $\vec{b}$  είναι παράλληλο στον άξονα  $x'x$ .
  - (δ) Να βρείτε για ποιες τιμές των  $\kappa, \lambda$  το διάνυσμα  $\vec{a} + \vec{b}$  είναι το μηδενικό.
32. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, 4)$  και  $\Gamma(2, 5)$ .
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$ ,  $\overline{A\Gamma}$ ,  $\overline{B\Gamma}$ .
  - (β) Να βρείτε την ορίζουσα των διανυσμάτων  $\overline{AB}$ ,  $\overline{A\Gamma}$ .
  - (γ) Να βρείτε την ορίζουσα των διανυσμάτων  $\overline{AB}$ ,  $\overline{B\Gamma}$ .
  - (δ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου.
  - (ε) Να βρείτε τα διανύσματα  $\overline{AB} + \overline{A\Gamma}$  και  $2\overline{B\Gamma} - \overline{AB}$ .
  - (στ) Να υπολογίσετε τα μέτρα  $|\overline{AB}|$ ,  $|\overline{A\Gamma}|$ ,  $|\overline{B\Gamma}|$ .
  - (ζ) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;
  - (η) Να υπολογίσετε τα μέτρα  $|\overline{AB} + \overline{A\Gamma}|$  και  $|2\overline{B\Gamma} - \overline{AB}|$ .