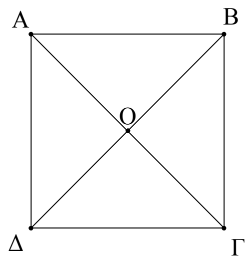
3. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος έχει πλευρά 3 και οι διαγώνιοί του τέμνονται στο Ο. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

   (α) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AΔ}}$ (β) $\overrightarrow{\text{OA}}\cdot\overrightarrow{\text{OΓ}}$ (γ) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AΓ}}$

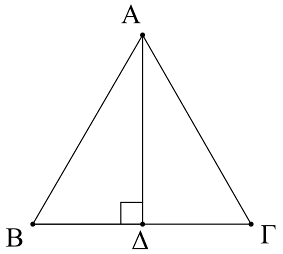
   (δ) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{ΔΓ}}$ (ε) $\overrightarrow{\text{OA}}\cdot\overrightarrow{\text{OB}}$ (στ) $\overrightarrow{\text{AΓ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΓB}}$



2. Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος έχει πλευρά 4 και το ΑΔ είναι το ύψος του. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

   (α) $\overrightarrow{\text{AΔ}}\cdot\overrightarrow{\text{BΓ}}$ (β) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AΔ}}$ (γ) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AΓ}}$

   (δ) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{ΓA}}$ (ε) $\overrightarrow{\text{BΔ}}\cdot\overrightarrow{\text{BΓ}}$ (στ) $\overrightarrow{\text{ΔB}}\cdot\overrightarrow{\text{ΔΓ}}$



3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Δίνονται ακόμη τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

   (α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

   (β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\gamma},\vec{\delta}$.

   (γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$. Να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ το διάνυσμα $\vec{\delta}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\delta}\,//\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ και $\vec{\alpha}\perp\left(\vec{\beta}+\vec{\delta}\right)$.

5. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}\neq\vec{0}$. Να αποδείξετε ότι:

   (α) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

   (β) $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 12\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
(α) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
(β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.
(γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

7. Αν για τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4$, να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

8. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

9. Αν $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, να βρείτε το $|3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

10. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + 6\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = 6$. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$.

11. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 2$, $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 1$ και η γωνία των διανυσμάτων $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$.

12. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{6}|\vec{\beta}|$.

13. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία τα διανύσματα $\vec{u} = \alpha\vec{i} + (\alpha + 2)\vec{j}$ και $\vec{v} = 2(\alpha + 1)\vec{i} + (1 - 2\alpha)\vec{j}$ είναι κάθετα.

14. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4,3)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ και μια κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

15. Αν $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (x - 1, 2)$ και $\vec{\gamma} = (x, x + 2)$, να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4,1)$, $\vec{\beta} = (-2,4)$ και $\vec{\gamma} = (2,3)$.
(α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$.
(β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2$ και $\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.
(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}$ και $(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha}$.

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε:
(α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$.
(β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$. (1η Δέσμη 1999)

18. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$ είναι $AB=\alpha$ και $A\Gamma=\alpha\sqrt{3}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}.$$

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$.
(α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.
(β) Να υπολογίσετε το μέτρο $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|$.
(γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha},\vec{\alpha}+2\vec{\beta})$.

20. Για τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\beta}|=2$. Αν $\vec{u}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$, να βρείτε:
(α) τα μέτρα $|\vec{u}|$ και $|\vec{v}|$.
(β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
(γ) την προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{u}$.

21. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=8$, $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=(2,2\sqrt{3})$, $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\gamma}|=4$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}|=2\sqrt{7}$.
(β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.
(γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha},\vec{\gamma})$.
(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

22. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB=2A\Delta$, $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$. Έστω ότι Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και Ν το μέσο του ΑΜ. Υποθέτουμε ακόμη ότι $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$.
(α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{\Delta N}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
(β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{\Delta N}$.
(γ) Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{\beta}$.
(δ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{3}|\vec{\alpha}|$ και να βρείτε τη γωνία $M\hat{A}B$.