5. Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

1. (α) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-4)x+(\lambda^2-2\lambda)y+(\lambda+3)=0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία.
(β) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x+(\lambda-1)y+(\lambda-2)=0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία.
(γ) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-4)x+(\lambda+2)y+5\lambda=0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία.

2. Δίνεται η εξίσωση $(\mu-2)x+(\mu^2-4)y+2\mu-5=0$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$.
Να αντικαταστήσετε στην παραπάνω εξίσωση κάθε μια από τις τιμές
$$\mu=-2,\ \mu=0,\ \mu=1,\ \mu=2,\ \mu=3$$
και να εξετάσετε αν προκύπτει εξίσωση ευθείας. Στις περιπτώσεις που προκύπτει εξίσωση ευθείας να βρείτε, αν ορίζεται, τον συντελεστή διεύθυνσης και να εξετάσετε αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-6,1)$.

3. Δίνεται η εξίσωση $(\mu-2)x+2\mu y+6-\mu=0$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(3,-1)$.
(β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ η παραπάνω ευθεία:
   i. διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$.
   ii. είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
   iii. είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

4. Δίνεται η εξίσωση $2\lambda x-(\lambda+3)y+3\lambda+3=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-1,1)$.
(β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η παραπάνω ευθεία:
   i. διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3,3)$.
   ii. είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
   iii. είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

5. Δίνεται η εξίσωση $(2x+2y-2)+\alpha(x-y-3)=0$, (1) όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία.
(β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από (1) για τις διάφορες τιμές του α διέρχονται από ένα σταθερό σημείο το οποίο να βρείτε.
(γ) Να βρείτε για ποια τιμή του α η ευθεία (1) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3,4)$.
(δ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (1) να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(3,0)$.

6. Δίνεται η εξίσωση $(3x+y-1)+\alpha(x-y+5)=0$, (1) όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία.
(β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από (1) για τις διάφορες τιμές του α διέρχονται από ένα σταθερό σημείο το οποίο να βρείτε.
(γ) Να βρείτε για ποια τιμή του α η ευθεία (1) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$.

(δ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (1) να διέρχεται από το σημείο $B(-3,2)$.

7. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y + 4 = 0$.
   (α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ παράλληλο στην ευθεία ε_1 και ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ παράλληλο στην ευθεία ε_2.
   (β) Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

8. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : -x + 2y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x - y + 1 = 0$.
   (α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ παράλληλο στην ευθεία ε_1 και ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ παράλληλο στην ευθεία ε_2.
   (β) Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

9. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\kappa - 1)x - \kappa y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : \kappa x - 4y - 1 = 0$. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:
   (α) να είναι παράλληλες.
   (β) να είναι κάθετες.

10. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\kappa + 3)x - (\kappa - 1)y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\kappa - 1)x - 2y - 3 = 0$. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:
   (α) να είναι παράλληλες.
   (β) να είναι κάθετες.

11. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 4x - 2y + \alpha = 0$ και $\varepsilon_2 : \beta x + 3y - 9 = 0$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:
   (α) να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
   (β) να είναι παράλληλες.
   (γ) να συμπίπτουν.

12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + y + \alpha = 0$ και $\varepsilon_2 : \beta x - 2y + 18 = 0$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:
   (α) να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
   (β) να είναι παράλληλες.
   (γ) να συμπίπτουν.

13. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6x^2 - xy - y^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες και να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών.

14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$ παριστάνει δύο κάθετες ευθείες.