

7. Κύκλος

- Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των παρακάτω κύκλων:
 - $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.
 - $x^2 + y^2 - 8x = 0$.
 - $x^2 + y^2 + 10y - 25 = 0$.
 - $3x^2 + 3y^2 - 6x + 9y + 5 = 0$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:
 - Κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 2.
 - Κέντρο $(1, -2)$ και ακτίνα 4.
 - Κέντρο $(4, 2)$ και εφάπτεται στον άξονα $x'x$.
 - Κέντρο $(-3, -2)$ και εφάπτεται στον άξονα $y'y$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:
 - Κέντρο (a, a) και ακτίνα $\sqrt{3a}$, όπου $a > 0$.
 - Κέντρο $(a, a + 2)$ και ακτίνα $a + 2$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:
 - Κέντρο $(1, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $2x - y - 4 = 0$.
 - Κέντρο $(3, -2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $x + y = 3$.
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία $3x - 2y + 13 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 12x + 8y - 65 = 0$.
- Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παρακάτω κύκλων:
 - $(x - 2)(x - 4) + (y - 3)(y - 5) = 0$.
 - $x(x + 3) + y(y - 4) = 0$.
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(-1, 2)$ ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία ο κύκλος με κέντρο $(2, -3)$ και ακτίνα 5 τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε το μήκος της χορδής που ορίζει ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ στον άξονα $y'y$.
- Να βρείτε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος από το σημείο $A(6, 8)$ προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = 19$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 10x$ στο σημείο του $A(2, 4)$.
- Δίνεται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με κέντρο $K(1, -2)$ ώστε οι δύο κύκλοι να εφάπτονται εσωτερικά και
 - ο κύκλος C_1 βρίσκεται μέσα στον C_2
 - ο κύκλος C_2 βρίσκεται μέσα στον C_1 .

13. Δίνονται οι κύκλοι $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 30 = 0$ και $x^2 + y^2 + 8x - 16y + 30 = 0$.
(α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων.
(γ) Να βρείτε το μήκος της κοινής χορδής.
(δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των κύκλων.
14. Να βρείτε ποιο σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0$ απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.
15. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 20$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x$.
16. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $(3, -4)$. Αν Α, Β είναι τα σημεία τομής αυτής της εφαπτομένης με τις εφαπτομένες του κύκλου που είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$ να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{A\hat{O}B}$ είναι ορθή, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.
17. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(4,0)$ και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $2y = 3x - 5$.
18. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$ της οποίας το ένα άκρο έχει συντεταγμένες $(1,3)$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του άλλου άκρου;
19. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay + a^2 = 0$ με $a \neq 0$ εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$.
20. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $3x - 4y + 17 = 0$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$.
21. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $x^2 + (y-1)^2 = 16$ βρίσκεται μέσα στον κύκλο $x^2 + y^2 - 2x = 35$.
22. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$ και $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 48 = 0$ εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε το σημείο επαφής.
23. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$ και $x^2 + y^2 - 12x - 10y - 60 = 0$ εφάπτονται και να βρείτε την κοινή εφαπτομένη στο σημείο επαφής.
24. Δίνονται τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,2)$. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $2(MA) = 3(MB)$.
25. Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ που άγονται από το σημείο $P(3,6)$.

26. (α) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της ευθείας $x + y - 1 = 0$ και του κύκλου $x(x - 1) + y(y - 1) = 0$.
(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(x - 1) + y(y - 1) = \lambda(x + y - 1)$ παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
(γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι του ερωτήματος (β) διέρχονται από τα σημεία A, B .
27. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2(\alpha - 2)y + 2 = 0$, (1) όπου $\alpha \neq 1$.
(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \neq 1$.
(β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.
(γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της εξίσωσης (1) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A .
(δ) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων στο κοινό τους σημείο A .
28. Έστω A ένα σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Να βρείτε την μικρότερη και την μεγαλύτερη τιμή της απόστασης (AB) όπου $B(5, 3)$.
29. Έστω A ένα σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 + 6y = 0$ και B ένα σημείο της ευθείας $x + y = 5$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της απόστασης (AB) .
30. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο του κύκλου $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ να αποδείξετε ότι $1 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq 2$.