

8. Παραβολή

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει:
 - (α) $p = 4$ και άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
 - (β) εστία $E\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.
 - (γ) διευθετούσα $\delta: y = 2$.
 - (δ) άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει:
 - (α) $p = 2$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
 - (β) εστία $E(0, -3)$.
 - (γ) διευθετούσα $\delta: x = 4$.
 - (δ) άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$.
3. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η χορδή της AB που διέρχεται από την εστία E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. Έστω Γ το σημείο στο οποίο τέμνει η διευθετούσα τον άξονα $x'x$. Να αποδείξετε ότι $AB = 2E\Gamma$.
4. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$.
 - (α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από την εστία της C .
 - (β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A και B της ε και της C .
 - (γ) Να βρείτε το μήκος της χορδής AB .
5. Δίνεται η παραβολή $C: x^2 = 8y$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$.
 - (α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από την εστία της C .
 - (β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A και B της ε και της C .
 - (γ) Να βρείτε το μήκος της χορδής AB .
6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 12x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - 2y + 30 = 0$.
7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 6y$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x - 1$.
8. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 8x$ που διέρχονται από το σημείο $A(5, -7)$.
9. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $x^2 = -2y$ που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 4)$.
10. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή στην αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = 4x + 1$. Ποιο είναι το σημείο επαφής;

11. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή στην αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = x - 3$. Ποιο είναι το σημείο επαφής;
12. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η ευθεία $\varepsilon_1: y = \mu x$ με $\mu \neq 0$. Έστω ε_2 μια ευθεία κάθετη στην ε_1 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
(α) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει την C εκτός από την αρχή των αξόνων σε ένα σημείο A να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.
(β) Αν η ευθεία ε_2 τέμνει την C εκτός από την αρχή των αξόνων σε ένα σημείο B να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.
(γ) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB.
(δ) Να αποδείξετε ότι η χορδή AB διέρχεται από σταθερό σημείο.
13. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ με κορυφή O και δύο σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.
(α) Αν το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με κορυφή το O, να δείξετε ότι $x_1 = x_2$.
(β) Αν το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο, να αποδείξετε ότι $(OAB) = 48a^2\sqrt{3}$.
14. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από την εστία E της παραβολής $C: y^2 = 2px$ και τέμνει την C στα σημεία $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι $y_1 y_2 = -p^2$.
15. Έστω d_1, d_2 οι αποστάσεις των σημείων $O(0,0)$ και $A(p,0)$ από μια εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$. Να αποδείξετε ότι $d_1^2 - d_2^2 = \text{σταθερό}$.
16. Η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο M της παραβολής $y^2 = 2px$ διαφορετικό της κορυφής τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A. Αν E είναι η εστία της παραβολής να αποδείξετε ότι $\widehat{EAM} = 90^\circ$.
17. Να βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής $y^2 = 6x$ που εφάπτονται και στον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$.
18. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(3\alpha, 6\sqrt{\alpha})$ με $\alpha \geq 0$.
19. Οι παραβολές $C_1: x^2 = 4ay$ και $C_2: y^2 = 4ax$ τέμνονται στην αρχή των αξόνων O και σε ένα σημείο M. Η εφαπτομένη της C_1 στο M τέμνει την C_2 στο A και η εφαπτομένη της C_2 στο M τέμνει την C_1 στο B. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\text{συν}(\widehat{AMB}) = \frac{4}{5}$.
(β) η AB είναι κοινή εφαπτομένη των δύο παραβολών.
20. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και τυχαία εφαπτομένη (ε) της C σε σημείο διαφορετικό από την κορυφή. Από την κορυφή O φέρνουμε την κάθετη OA προς την (ε), η οποία τέμνει την C πάλι στο B. Να αποδείξετε ότι $OA \cdot OB = p^2$.

21. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ με εστία E . Έστω (ε) η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ και (ζ) η κάθετη στην (ε) στο σημείο A . Η (ε) τέμνει τη διευθετούσα, τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία B, Γ, Δ αντίστοιχα. Η ευθεία (ζ) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Z . Έστω K, H οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Η AH τέμνει τη διευθετούσα στο Θ . Έστω $M(x_2, y_2)$ το σημείο τομής της AE με την παραβολή. Να αποδείξετε ότι:
- (α) Το O είναι το μέσο του ΓK και το Δ το μέσο του OH .
 - (β) $\Delta E \perp AB$.
 - (γ) $AE \perp EB$.
 - (δ) $E\Delta^2 = A\Delta \cdot B\Delta$.
 - (ε) Το $AE\Gamma\Theta$ είναι ρόμβος.
 - (στ) Η $A\Gamma$ διχοτομεί τη γωνία $E\hat{A}\Theta$.
 - (ζ) Το μήκος του KZ είναι σταθερό.
 - (η) Ο κύκλος με διάμετρο την EA εφάπτεται στον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ .
 - (θ) Ο κύκλος με διάμετρο την AB διέρχεται από την εστία E .
 - (ι) Τα γινόμενα x_1x_2 και y_1y_2 είναι σταθερά.
 - (ια) Οι εφαπτομένες της παραβολής στα A, M τέμνονται κάθετα στο B .

Υποδείξεις:

- (α) Δείξτε ότι Δ μέσο OH και ότι τα τρίγωνα $O\Gamma\Delta$ και $HA\Delta$ είναι ίσα.
- (β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης AB : $yy_1 = p(x + x_1)$ είναι $\lambda_{AB} = \frac{p}{y_1}$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{AE} = -1$.
- (γ) Είναι $B\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1}{2} - \frac{p^2}{2y_1}\right)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$.
- (δ) Το $E\Delta$ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου AEB .
- (ε) Αρκεί να δείξουμε ότι το Δ είναι το μέσο του ΘE . Τότε το $AE\Gamma\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος.
- (στ) Το $AE\Gamma\Theta$ είναι ρόμβος, άρα οι διαγώνιες είναι και διχοτόμος.
- (ζ) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του Z . Το μήκος του KZ είναι $|p|$.
- (η) Έστω Λ το μέσο του AE . Το $OE\Lambda H$ είναι τραπέζιο και η $\Delta\Lambda$ διάμεσος του τραπεζίου. Τότε $\Delta\Lambda \perp y'y$ και $\Delta\Lambda = \frac{OE + AH}{2} = \frac{H\Theta + AH}{2} = \frac{A\Theta}{2} = \frac{AE}{2}$.
- (θ) Προκύπτει από το (γ).
- (ι) Από την $\det(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EM}) = 0$ παίρνουμε $y_1y_2 = -p^2$ και $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$.
- (ια) Το B ανήκει στην εφαπτομένη που άγεται από το M . Ακόμη από το (ι) παίρνουμε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{MB} = -1$

