9. Έλλειψη

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει
(α) τις εστίες της στον άξονα $x'x$, μήκος μεγάλου άξονα 8 και μήκος μικρού άξονα 4.
(β) τις εστίες της στον άξονα $x'x$ με εστιακή απόσταση 12 και μικρό ημιάξονα 8.

2. Να βρείτε τις κορυφές και τις εστίες κάθε μιας από τις παρακάτω ελλείψεις
(α) $9x^2+25y^2=225$ (β) $\frac{3}{4}x^2+4y^2=108$ (γ) $\frac{2x^2}{3}+\frac{3y^2}{2}=24$.

3. Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $4x+3y=1$.

4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ που άγονται από το σημείο $\text{Α}(3,4)$.

5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με κορυφές $\text{Α}(\alpha,0)$ και $\text{Α}'(-\alpha,0)$ και ένα σημείο της $\text{Μ}(x_1,y_1)$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ και η εφαπτομένη στο σημείο Α τέμνονται στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $\text{ΟΔ}//\text{Α}'\text{Μ}$.

6. Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$ και η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ, Λ των δύο κωνικών τομών είναι $\text{Κ}\left(\frac{p}{2},p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2},-p\right)$.
(β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των δύο κωνικών τομών στο σημείο Κ είναι κάθετες.

7. Το σημείο $\text{Μ}(2,1)$ είναι το μέσο μιας χορδής της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής.

8. Να βρείτε το μήκος της χορδής της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που διέρχεται από την εστία $\text{Ε}(\gamma,0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. (Το μήκος αυτής της χορδής λέγεται *παράμετρος της έλλειψης*).

9. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με εστίες $\text{Ε}(\gamma,0)$ και $\text{Ε}'(-\gamma,0)$. Οι ευθείες $\delta: x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ και $\delta': x=-\frac{\alpha^2}{\gamma}$ λέγονται *διευθετούσες της έλλειψης*.
(α) Να αποδείξετε ότι οι διευθετούσες της έλλειψης δεν την τέμνουν.

(β) Έστω Μ ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{(\mathrm{ME})}{d(\mathrm{M},\delta)}=\varepsilon$, όπου ε είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης.

10. Η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ (διαφορετικό από της κορυφές της) και η κάθετη στην εφαπτομένη στο ίδιο σημείο τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{OA})\cdot(\mathrm{OB})=\gamma^2$, όπου 2γ είναι η εστιακή απόσταση και Ο η αρχή των αξόνων.

11. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ από μια τυχαία εφαπτομένη της είναι σταθερό και ίσο με β^2.

12. Οι εφαπτομένες στα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,0)$ και $\mathrm{A}'(-\alpha,0)$ της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνουν μια τυχαία εφαπτομένη αυτής στα σημεία Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης. (Αρκεί $\Gamma\mathrm{E}\perp\Delta\mathrm{E}$).

13. Έστω Μ τυχαίο σημείο της διευθετούσας $\delta:\ x=\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$ της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$. Από το Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ.
(α) Να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ διέρχεται από την εστία $\mathrm{E}(\gamma,0)$.
(β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AB}\perp\mathrm{ME}$.

14. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(-4,0)$ και $\mathrm{B}(4,0)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\lambda_{\mathrm{AM}}\cdot\lambda_{\mathrm{BM}}=-9$.

15. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$, ο κύκλος $x^2+y^2=9$ και ένα σημείο Α του κύκλου, το οποίο δεν ανήκει στον άξονα $y'y$. Η κάθετη από το Α προς τον άξονα $x'x$ τέμνει την έλλειψη στο σημείο Β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου και της έλλειψης στα σημεία Α και Β αντίστοιχα τέμνονται σε ένα σημείο Μ, το οποίο ανήκει στον άξονα $x'x$.