

Ασκήσεις στις Συναρτήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

ii. $f(x) = \sqrt{1-e^x}$

iii. $f(x) = \ln(x^2-4)$

iv. $f(x) = (x+1)^{x-2}$

v. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4-x-1}}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln(e^{2x}-5)$

ii. $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)+2}$

iii. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{9-x}}$

iv. $f(x) = \frac{\sqrt{4-|x|}}{\ln x}$

v. $f(x) = \frac{2}{x+1} + \ln \frac{2-x}{2+x}$

vi. $f(x) = \sqrt{x - \frac{4}{x+3}}$

vii. $f(x) = \ln \frac{2-e^x}{e^x+1}$

viii. $f(x) = \sqrt{2\ln x - \ln^2 x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 5$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(-2)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 6-2x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(2)$ και $f(1)$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

5. Έστω $f(x) = \frac{\alpha^x}{1+\alpha^x}$ με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ να βρείτε το α και το $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύει $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = \frac{17}{8}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ και $f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1+e^x}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(-x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 1 \\ x, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \geq 0 \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
 $A = f(0) + g(0)$, $B = -f(2) + g(-2)$, $\Gamma = \frac{f(-1)}{g(-1)}$, $\Delta = [-f(3)] \frac{1}{g(3)}$.
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 - 1$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ae^x$. Να βρείτε για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x - x^2}{\sqrt{1 - 2x^2}}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
14. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
(α) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 0 \\ \sin x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ (β) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ (γ) $h(x) = \begin{cases} e^x, & \text{αν } x < 0 \\ \ln x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

15. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{3x^2 - 12}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^3 - x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x^2 \sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}}$

v. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{3x + x \ln \frac{1}{x^3}}{\ln \frac{x}{e}}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 3x + 1}{x - 1}$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{\sqrt{x} - 1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{f(x) - f(2)}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{f(x) - f(3)}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sqrt{x} \frac{2+x}{f(x) - 1} \right]$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+6} - 3)f(x)$.

19. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha + \sqrt{x}}{x + 2} = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

20. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 3x^5$

ii. $f(x) = 4x^{-3}, x \neq 0$

iii. $f(x) = -2\sqrt[3]{x}, x \geq 0$

iv. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, x > 0$

21. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2x^3 + \sin x$

ii. $f(x) = e^x + 2x - 1$

iii. $f(x) = \ln x - 3x^6, x > 0$

iv. $f(x) = \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$

22. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x \ln x + e^2, x > 0$

ii. $f(x) = x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu \frac{\pi}{7}$

iii. $f(x) = \sqrt{x}e^x + \ln 2, x \geq 0$

iv. $f(x) = (x^2 + \sqrt{2})\eta\mu x$

23. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x}{x+2}, x \neq -2$

ii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}$

iii. $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, x > 0$

iv. $f(x) = \epsilon\phi x, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

24. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$

ii. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}, x \geq 0$

iii. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}, x \neq -1$

iv. $f(x) = \frac{xe^x}{x+2}, x \neq -2$

25. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x - \ln x}{x^2 + 1}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{e^x}$

iii. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, x \neq 0$

iv. $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}, x > 0$

26. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (x^2 + 3x)^4$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

iii. $f(x) = \eta\mu^2 x$

iv. $f(x) = \eta\mu(\ln x), x > 0$

27. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i. $f(x) = e^{\sqrt{x}}, x \geq 0$

ii. $f(x) = \ln x^2, x \neq 0$

iii. $f(x) = \frac{e^{\eta\mu x}}{\sigma\upsilon\nu x}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iv. $f(x) = e^{2\ln x}, x > 0$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 \ln x$. Να αποδείξετε ότι $xf''(x) = 2f'(x) + 3x^2$ για κάθε $x > 0$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(f''(x) - f'(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$. Να αποδείξετε ότι $x(f''(x) + f(x)) = -2f'(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

31. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = xe^{x-1}$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.

(α) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ με τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha(x+1)^2$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι ίσος με 4.
34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - 2x + 3$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f οι οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $x + y + 1 = 0$.
35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία που αυτή τέμνει τους άξονες είναι παράλληλες.
36. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(x-1)$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- (α) τη συνάρτηση $f'(x)$.
 - (β) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.
 - (γ) το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.
 - (δ) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .
37. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
- (α) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.
 - (β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$.
 - (γ) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .
38. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \frac{1}{3}$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.
- (α) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 1$, να βρείτε τους αριθμούς α και β .
 - (β) Για $\alpha = -1$ και $\beta = 3$
 - (α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
 - (β) να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος.
39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha x + \beta}$ όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(1) = \frac{1}{2}$ και $f'(0) = 1$.
- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.
 - (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - (γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(e^2, f(e^2))$.

(γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(γ) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος f' είναι συνάρτηση γνησίως φθίνουσα στο A .

(δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+4}-2}$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \sin x$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = 2(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-2x} - e^{2x} + 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = 4f(x) - 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-3\alpha^2} - x + \alpha^3$ όπου $\alpha > 0$.

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f'(x)$.

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή.

(γ) Αν $E(\alpha)$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f να υπολογίσετε την τιμή του α για την οποία η $E(\alpha)$ γίνεται ελάχιστη.