

### Ασκήσεις στις Πιθανότητες

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές και σημειώνουμε κάθε φορά το αποτέλεσμα (κεφαλή – γράμματα). Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  
Α: Οι τρεις ενδείξεις είναι ίδιες.  
Β: Δύο τουλάχιστον ενδείξεις είναι κεφαλή.  
Γ: Δύο το πολύ ενδείξεις είναι γράμματα.
2. Ένα κουτί περιέχει 4 άσπρες, 5 κόκκινες και 11 μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε στην τύχη μία μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  
Α: Η μπάλα είναι μαύρη.  
Β: Η μπάλα είναι κόκκινη ή μαύρη.  
Γ: Η μπάλα δεν είναι ούτε άσπρη ούτε μαύρη.
3. Σε ένα πείραμα τύχης ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Θεωρούμε τα ενδεχόμενα  $A = \{\omega \in \Omega / \omega < 7\}$  και  $B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ περιττός}\}$ . Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα στοιχείο του  $\Omega$  να βρείτε τις πιθανότητες να ανήκει  
(α) στο Α.  
(β) στο Α ή στο Β.  
(γ) στο Α και στο Β.  
(δ) στο Α και όχι στο Β.  
(ε) σε ένα το πολύ από τα Α και Β.
4. Ρίχνουμε ένα ζάρι διαδοχικά δύο φορές. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:  
(α) Α: Το αποτέλεσμα της 1<sup>ης</sup> ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2<sup>ης</sup> ρίψης.  
(β) Β: Οι ενδείξεις και στις δύο ρίψεις είναι ίδιες.  
(γ) Γ: Το άθροισμα των ενδείξεων και στις δύο ρίψεις είναι μεγαλύτερο του 9.
5. Σε ένα τμήμα του σχολείου υπάρχουν 8 αγόρια και 12 κορίτσια. Το  $\frac{1}{4}$  των αγοριών και το  $\frac{1}{3}$  των κοριτσιών έχουν μαύρα μάτια. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του τμήματος να βρείτε την πιθανότητα  
(α) να είναι κορίτσι.  
(β) να έχει μαύρα μάτια.  
(γ) να είναι αγόρι και να μην έχει μαύρα μάτια.
6. Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία ισχύουν
$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{4} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

7. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A) = \frac{13}{40}, P(B) = \frac{7}{20} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cap B, A - B, A \cup B'$ .

8. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B') = \frac{1}{4} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{7}{8}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cap B, A - B$ .

9. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = 2P(A \cap B).$$

Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A \cap B), P(B), P(A - B), P(A \cup B')$ .

10. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία ισχύουν

$$P(A) = 2P(B), P(A \cap B) = 0,2 \text{ και } P(A \cup B) = 0,8.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $B, A', A - B$ .

11. Έστω  $A$  ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοιο ώστε  $P(A) = 4P(A')$ . Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(A')$ .

12. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα έχουν γινόμενο πιθανοτήτων  $\frac{2}{9}$ . Να βρείτε την πιθανότητα του καθενός.

13. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία ισχύουν

$$B \subseteq A, P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{3}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$ .

14. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία ισχύουν

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(A') = \frac{2}{3} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A), P(B), P(A \cap B')$ .

15. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} \text{ και } P(A') + P(B') = \frac{7}{5}.$$

Να βρείτε την πιθανότητα  $P(A \cup B)$ .

16. Σε ένα σχολείο τα ποσοστά των μαθητών της Α΄ Λυκείου που άριστευσαν στην Άλγεβρα είναι 15%, στη Γεωμετρία 7% ενώ το 5% άριστευσε και στα δύο αυτά μαθήματα. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή της Α΄ Λυκείου από το παραπάνω σχολείο. Να βρείτε την πιθανότητα:
- (α) ο μαθητής να άριστευσε σε ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα.
  - (β) ο μαθητής να άριστευσε στην Άλγεβρα αλλά όχι στη Γεωμετρία.
  - (γ) ο μαθητής να άριστευσε σε ένα μόνο από τα δύο μαθήματα.
17. Το 15% των ατόμων ενός πληθυσμού ασχολούνται με τον αθλητισμό, το 20% με τη μουσική και το 10% και με τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο να βρείτε την πιθανότητα
- (α) να ασχολείται με τη μουσική αλλά όχι με τον αθλητισμό.
  - (β) να μην ασχολείται ούτε με τη μουσική ούτε με τον αθλητισμό.
18. Σε μια πόλη το 40% των ατόμων δεν έχουν κινητό τηλέφωνο, το 60% δεν έχουν αυτοκίνητο και το 10% δεν έχουν ούτε κινητό τηλέφωνο ούτε αυτοκίνητο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο να βρείτε την πιθανότητα
- (α) να έχει κινητό τηλέφωνο και αυτοκίνητο.
  - (β) να έχει κινητό τηλέφωνο αλλά να μην έχει αυτοκίνητο.
19. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία ισχύει η πιθανότητα
- να πραγματοποιείται το A είναι  $\frac{1}{5}$ .
  - να μην πραγματοποιείται το B είναι  $\frac{3}{5}$ .
  - να πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο είναι  $\frac{1}{6}$ .
- Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται:
- (α) ένα τουλάχιστον από τα A και B.
  - (β) το πολύ ένα από τα A και B.
  - (γ) κανένα από τα A και B.
  - (δ) μόνο το A.
  - (ε) μόνο ένα από τα A και B.
  - (στ) το A ή να μην πραγματοποιείται το B.
20. Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου το 40% των μαθητών ασχολείται με το ποδόσφαιρο, το 30% με το μπάσκετ και το 20% με το ποδόσφαιρο και το μπάσκετ. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή να βρείτε την πιθανότητα
- (α) να μην ασχολείται με το μπάσκετ.
  - (β) να μην ασχολείται ούτε με το ποδόσφαιρο ούτε με το μπάσκετ.
  - (γ) να ασχολείται με το μπάσκετ και να μην ασχολείται με το ποδόσφαιρο.
  - (δ) να ασχολείται με ένα το πολύ από τα παραπάνω αθλήματα.

21. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία ισχύουν  $P(A \cup B) = \frac{5}{7}$  και

$$P(B - A) = \frac{4}{7}.$$

(α) Να βρείτε την πιθανότητα  $P(A)$ .

(β) Αν τα  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα να βρείτε την πιθανότητα  $P(B)$ .

22. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε  $P(A) = \frac{3}{7}$  και

$$P(B - A) = \frac{2}{7}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cap (B - A)$ ,  $A \cup (B - A)$  και  $A \cup B$ .

23. Έστω  $A, B$  δύο ισοπίθανα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Αν οι πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$  και  $A \cap B$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης  $12x^2 - 7x + 1 = 0$  να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

(α)  $A$ ,  $A \cap B$  και  $A \cup B$ .

(β)  $A - B$ ,  $B - A$ .

(γ)  $(A - B) \cup (B - A)$ .

24. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις  $P(A) = 0,8$ ,  $P(B) = 0,6$  και  $P(A \cap B) = 0,5$ . Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα  $A$  και  $B$ .

(β) Να πραγματοποιηθεί το  $A$  αλλά όχι το  $B$ .

(γ) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$ .

(δ) Να πραγματοποιηθεί ένα το πολύ από τα  $A$  και  $B$ .

25. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε  $P(A) = \frac{1}{4} + P(A \cap B)$ .

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A - B$  και  $A' \cup B$ .

(β) Αν ισχύει η σχέση  $P(A \cup B') = \frac{3}{2} - P(B)$  να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A \cap B$  και  $A$ .

26. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε  $P(A \cup B) = \frac{P(A) + P(B)}{2}$ .

(α) Να αποδείξετε ότι  $P(A) = P(B)$ .

(Υπόδειξη:  $A \subseteq A \cup B$ ,  $B \subseteq A \cup B$  άρα  $P(A) \leq P(A \cup B)$  και  $P(B) \leq P(A \cup B)$ ).

(β) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A - B)$  και  $P(B - A)$ .

27. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε  $P(A) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$  και

$$P(A \cup B) = \frac{2x}{x^2 + 2}, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι  $x = 1$ .

(β) Να αποδείξετε ότι  $P(B) = P(A \cap B)$ .

(γ) Αν  $P(B) = \frac{1}{2}$  να βρείτε την πιθανότητα  $P(A - B)$ .

28. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε  $P(A) = x$ ,

$$P(A \cap B) = 2x - \frac{2}{3}, \quad P(A - B) = \frac{2}{3}x^2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι  $x = \frac{1}{2}$ .

(β) Αν ισχύει  $P(B - A) = \frac{1}{3}$  να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

$$B, A \cup B, (A - B) \cup (B - A)$$

29. Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης. Η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$  είναι 0,4 και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα  $A$  και  $B$  είναι 0,5.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα  $A$  και  $B$ .

(β) Αν  $P(A - B) = 0,2$  να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(B - A)$ .

30. Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Έστω επίσης  $A = \{1, \alpha + 1, \alpha^2 + 3\}$  και  $B = \{3, 4\}$  δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Αν ισχύει η σχέση  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$  να βρείτε

(α) την τιμή του  $\alpha$ .

(β) τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A - B$ ,  $A \cap B$  και  $A \cup B'$ .

31. Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις  $P(\omega_1) = P(\omega_2)$  και  $P(\omega_3) = 0,2$ .

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(\omega_1), P(\omega_2)$ .

(β) Να βρείτε την πιθανότητα  $P(A)$ , όπου  $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ .

32. Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{P(\omega_1)}{3} = \frac{P(\omega_2)}{2} = \frac{P(\omega_3)}{5} = \frac{P(\omega_4)}{2}.$$

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3), P(\omega_4)$ .

(β) Να βρείτε την πιθανότητα  $P(A)$ , όπου  $A = \{\omega_2, \omega_3\}$ .

33. Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \text{ και } B = \{\omega_3, \omega_4\}. \text{ Αν ισχύουν οι σχέσεις } P(\omega_4) = \frac{2}{5} \text{ και } P(A - B) = \frac{3}{10} \text{ να}$$

βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(A \cap B)$ ,  $P(B)$ .

34. Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(\omega_1) = \frac{1-\alpha}{2}, \quad P(\omega_2) = \frac{7-4\alpha^2}{10} \quad \text{και} \quad P(\omega_3) = \frac{3\alpha^2}{5}$$

να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

35. Δίνεται ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  ενός πειράματος τύχης. Αν για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$  ισχύει η σχέση

$$P(\kappa) = \frac{2\kappa-1}{2^{\kappa+1}}, \quad \kappa = 1, 2, 3$$

να βρείτε την πιθανότητα  $P(4)$ .

36. Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$  ισχύουν οι σχέσεις

$$P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6}$$

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$ .

(β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ , τη διάμεσο  $\delta$  και το εύρος  $R$  των παραπάνω πιθανοτήτων.

(γ) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x - \frac{\alpha}{x}$  όπου  $\alpha \in \Omega$  και τα ενδεχόμενα

$$A = \left\{ \alpha \in \Omega / f'(1) < \frac{1}{\delta} \right\} \quad \text{και} \quad B = \{ \alpha \in \Omega / f''(3) < 0 \}.$$

- i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ .
- ii. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  είναι ασυμβίβαστα.
- iii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$ ,  $B$ ,  $A - B$ .

37. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}$ . Έστω  $A$ ,  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Οι πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(A \cup B)$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους και συμπίπτουν με τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$  και  $A \cup B$ .

(β) Να βρείτε την πιθανότητα  $P(B - A)$ .

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$ .

(δ) Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα  $A$  και  $B$  είναι ίση με  $\frac{1}{8}$  να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το  $A$  αλλά όχι το  $B$ .

38. Έστω  $A$ ,  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε

$$P(A \cup B) - P(A) \neq P(A - B).$$

Έστω επίσης η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2P(A) \cdot x + P^2(B)$ .

(α) Να αποδείξετε ότι  $P(A) \neq P(B)$ .

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Αν η πραγματοποίηση του ενδεχομένου  $A$  συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου  $B$  να αποδείξετε ότι

- i. η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει θετικό ελάχιστο.
- ii.  $f(P(B)) > 0$
- iii.  $0 < f(P(A \cup B)) \leq 1 - 2P(A) + P^2(B)$ .

39. Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και  $A, B$  δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$ . Έστω επίσης η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6P(A) \cdot x - 4.$$

(α) Να βρείτε τις συναρτήσεις  $f'(x)$  και  $f''(x)$ .

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f'$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \geq 6P(A) - \frac{3}{2}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(δ) Αν τα απλά ενδεχόμενα του  $\Omega$  είναι ισοπίθανα και ισχύει η σχέση  $A \cap B = \{x \in \Omega / f''(x) < 20\}$  να αποδείξετε ότι

i.  $P(A \cap B) = \frac{2}{7}$ .

ii.  $P(A) > \frac{1}{4}$ .

iii. η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

40. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ . Έστω επίσης  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε οι πιθανότητες  $P(A), P(A \cup B)$  δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο  $\left\{ \kappa, \lambda, \frac{1}{2} \right\}$  όπου  $\kappa = f''(2)$  και  $\lambda = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{5(x-3)}$ .

(α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $\kappa$  και  $\lambda$ .

(β) Να αποδείξετε ότι  $P(A) = 0, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ .

(γ) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A \cap B)$  και  $P(B)$ .

41. Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x^2 + 1} \text{ όπου } \alpha \in \Omega.$$

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f'(x)$ .

(β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα

$$A = \{\alpha \in \Omega / f'(0) < 2f(2)\} \text{ και } B = \{\alpha \in \Omega / f'(2) < 0\}.$$

(γ) Αν ισχύουν οι σχέσεις  $P(1) = P(8) + P(9) + P(10) = \frac{3}{10}$  να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A, B, A \cap B$ .