10. Σταθερή συνάρτηση

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος)
   i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(x)=c$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
   ii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$ τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:
   α) $f'(x)=e^x(\text{ημ}x+\text{συν}x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.
   β) $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=\dfrac{e+1}{e}$.
   γ) $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.
   δ) $f'(x)=\text{συν}3x+2xe^{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2e$.
   ε) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{2x}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$.
   στ) $f'(x)=2\text{ημ}x\text{συν}x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:
   α) $f'(x)=3x^2f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$ και $f(0)=e^2$.
   β) $x^2f'(x)+e^{-f(x)}=0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=0$.
   γ) $f'(x)\cdot\text{συν}x=1+f(x)\cdot\text{ημ}x$, για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=1$.
   δ) $xf'(x)=\dfrac{1}{x^2}-2f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=0$.
   ε) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{f(x)}{x}$, για κάθε $x\neq 0$ και $f(1)=e=-f(-1)$.
   στ) $1+xf'(x)=xe^{-f(x)}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=0$.

4. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:
   α) $f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.
   β) $xf'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=e$.
   γ) $f'(x)=2\text{ημ}x\cdot\sqrt{f(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$ και $f(0)=0$.
   δ) $3f'(x)=\dfrac{8e^x}{f^2(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.
   ε) $f'(x)-1=\dfrac{f(x)}{x}$, για κάθε $x\neq 0$ και $f(-1)=2f(1)=1$.
   στ) $f'(x)=f(x)+2xe^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=-1$.

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=-4x^3f^2(x)$ και $f(0)=1$.

   α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x^4$ είναι σταθερή.

   β) Να βρείτε τον τύπο της f.

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(1)=2$ και $f\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot f'(x)=\dfrac{2}{x}$ για κάθε $x>0$.

   α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

   β) Να βρείτε τον τύπο της f.

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=4$, $f'(1)=-2$ και $f''(x)=-\dfrac{3f'(x)}{2x}$ για κάθε $x>0$.

   α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x)=2xf'(x)+f(x)$ και $h(x)=\sqrt{x}\cdot f(x)$ είναι σταθερές στο $(0,+\infty)$.

   β) Να βρείτε τον τύπο της f.

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)=2xf(x)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(0)=e$ να βρείτε τον τύπο της f.

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=0$ και $xf'(x)-2f(x)=x$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(\pi)=0$ και $xe^xf'(x)+e^xf(x)=\text{συν}x-\text{ημ}x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

12. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2f''(x)+xf'(x)-f(x)=3x^2$ για κάθε $x>0$. Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3x^2}{x^2-4x+3}=2$ να βρείτε
    α) τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.
    β) τον τύπο της f.

13. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν $f''(1)=15e$, $f'(1)=3e$ και $f''(x)=6xf(x)+3x^2f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

14. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=4$, $f(-1)=-2$ και $xf'(x)-2f(x)=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=1$, $f(-1)=-4$ και $x^3f'(x)+x^2f(x)=1$ για κάθε $x\neq 0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$ και $xf'(x)=(x-1)f(x)$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

17. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y=5x+3$.
α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$
β) Να βρείτε τον τύπο της f.

18. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=2f'(0)=1$ και $f''(x)f(x)+[f'(x)]^2=f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

19. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=-1$, $f'(0)=3$ και $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f. (Υπόδειξη: Προσθέστε και στα δύο μέλη $f'(x)$).

20. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x>0$. Αν $f(1)=0$ να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ για κάθε $x>0$.