11. Μονοτονία συνάρτησης

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$. Έστω ότι $f(0)=4$ $f(1)=0$ και $f(2)=-2$.
   α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1)$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2]$.
   β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων $f(x)=1$ και $f(x)=5$.
   δ) Έστω g μια συνάρτηση με $g'(x)=f(x)$ και $g(1)=0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{g(x)}$.

2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Έστω ότι $f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x[f(x)+1]=2$.
   α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.
   β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.
   γ) Έστω η συνάρτηση g με $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha^2<3\beta$.
   α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση.
   δ) Έστω η συνάρτηση g με $g'(x)=e^x f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Έστω ότι $f(0)=0$, $f(-1)=2$ και $f(1)=3$.
   α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,0)\cup(0,1]$.
   β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   γ) Έστω η συνάρτηση g με $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

5. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x<1$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x>1$. Έστω ότι $f(0)=f(2)=0$.
   α) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.
   β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   γ) Έστω η συνάρτηση g με $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x\ne 0$. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

6. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$ με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[0,3)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(3,4]$. Έστω ότι $f(0)=f(4)=-2$ και $f(3)=-4$.
   α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le -2$ για κάθε $x\in[0,4]$.
   β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Έστω η συνάρτηση g με $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,4]$. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

7. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,e)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (e,+\infty)$. Έστω ότι $f(e) = -1$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$.
   α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
   β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (e,+\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.
   δ) Έστω η συνάρτηση g με $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$ και $f'''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
   α) Να βρείτε το πρόσημο της f''.
   β) Να αποδείξετε ότι η f' έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 2$
   γ) Να βρείτε την μονοτονία της f.
   δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln(x-1) - 4$, $x > 1$.
   α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
   β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
   δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 8x + 8\ln x + 7$, $x > 0$.
   α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
   β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
   γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.
   α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
   β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
   γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
   α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
   γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
   α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
   β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Τοπικά ακρότατα

14. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).
    i. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $x_0\in(\alpha,\beta)$ και $f'(x_0)=0$ τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.
    ii. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
    iii. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Το α είναι θέση πιθανού ακροτάτου της f.
    iv. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)<0$ στο διάστημα (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο διάστημα (x_0,β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

15. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0\neq 0$ και ισχύει $f^3(x)-(3x^2+1)f(x)=1-2x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε το x_0.

16. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $2f(x^2)-f^2(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
α) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0)=0$.
β) $f'(0)=f'(1)$.

17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα (α,β).

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in(0,1)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο και ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $-\alpha$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x>0$.
α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{\ln x+2x-2}{4x\sqrt{x}}$ για κάθε $x>0$.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημό της.

20. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=f(4)$. Αν η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

21. Έστω f,g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες ώστε $f(x)g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(1)=0$ και $f'(1)\neq 0$ να αποδείξετε ότι $g(1)=0$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(f(x))=f(f'(x))$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 να αποδείξετε ότι

α) $x_0 = 0$.
β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4,5]$.
α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο.
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [2,4]$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 0$.

24. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$, $f(4)=4$ και $f(2)+f(3)=10$. Να αποδείξετε ότι
α) υπάρχει $x_0 \in [2,3]$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=5$.
β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο.
γ) υπάρχει $\xi \in (1,4)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

25. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f'(\alpha)<0$ και $f'(\beta)>0$. Να αποδείξετε ότι
α) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.
β) $f(x)<f(\alpha)$ για x κοντά στο α.
γ) $f(x)<f(\beta)$ για x κοντά στο β.
δ) υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

26. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύει μια από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:
α) Η f είναι γνησίως μονότονη.
β) Υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο της f το οποίο είναι τοπικό ελάχιστο.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $x_0\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $f(x)\ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=x_0$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ με $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x$ με $x>0$.
α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς την κυρτότητα.
β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε_1 της f στο 0 και την εφαπτομένη ε_2 της g στο 1.
γ) Να αποδείξετε ότι $e^x>\ln x$ για κάθε $x>0$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(x)=\frac{1}{3}xf'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=f(0)=0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(0)=0$.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο 0.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f''(x)+f(x)>2f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο στο οποίο η εφαπτομένη τους είναι κοινή.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq xe^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.