12. Ολοκληρώματα

Στις ασκήσεις 1-5 χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta \big(f(x)+g(x)\big)dx$
- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx$

1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 \frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^2 \frac{1}{1+e^{-x}}dx=2$.

2. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_e^1 \ln x dx$.

3. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $2\int_{-1}^\alpha \frac{x}{x^2+1}dx+\int_{-1}^\alpha \frac{2x^3}{x^2+1}dx=3$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\int_0^4 f(x)dx=1+\int_3^4 f(x)dx$.
   Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(x)dx=1$ και $\int_0^2 f(x)dx=1-\int_2^3 f(x)dx$.

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\int_0^2 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$.
   Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$.

Στην άσκηση 6 χρησιμοποιούμε κυρίως τον τύπο $\int_\alpha^\beta x^\rho dx=\left[\frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}\right]_\alpha^\beta$, για $\rho\neq -1$.

Ιδιότητες που είναι απαραίτητες:

- $\frac{1}{\alpha^\nu}=\alpha^{-\nu}$ (μετατρέπει το κλάσμα σε δύναμη)
- $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ (μετατρέπει τη ρίζα σε δύναμη)
- $\alpha^\nu\cdot\alpha^\mu=\alpha^{\nu+\mu}$ και $\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu}=\alpha^{\nu-\mu}$ (μετατρέπουν δύο δυνάμεις σε μία)

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$	ii. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}dx$	iii. $\int_1^2 \frac{1+x}{x^4}dx$
iv. $\int_0^4 x\sqrt{x}dx$	v. $\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$	vi. $\int_1^2 \frac{x^2\sqrt{x}-x+1}{x^2}dx$
vii. $\int_1^4 \left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$	viii. $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$	ix. $\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}}dx$

Στις ασκήσεις 7-10 χρησιμοποιούμε τον τύπο $\int_\alpha^\beta f'(x)dx = \left[f(x)\right]_\alpha^\beta$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι
   α) $\int_0^1 e^{x+f(x)}(1+f'(x))dx = e^{1+f(1)} - e^{f(0)}$ β) $\int_0^2 [xf''(x)+f'(x)]dx = 2f'(2)$.

Παραλλαγή της άσκησης 7

α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει $\int_0^1 e^{x+f(x)}(1+f'(x))dx = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=-1$.

β) Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει $\int_0^2 [xf''(x)+f'(x)]dx = 4$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(2,f(2))$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1 να αποδείξετε ότι $f(2)=3$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=-1$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα
   α) $\int_0^1 \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx$ β) $\int_0^1 x[2f(x)+xf'(x)]dx$ γ) $\int_0^1 f(x)f'(x)dx$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν $f(0)=-1$ και $f(1)=e$ να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f(x)-f'(x)}{f^2(x)}e^x dx = 2$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(1)=0$ και $\int_0^1 [f'(e^x)-f(e^x)e^{-x}]dx = 1$ να αποδείξετε ότι $f(e)=e$.

Στις ασκήσεις 11-14 θέτουμε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = c$ και συνδυάζουμε αυτή την ισότητα με την ισότητα της άσκησης για να υπολογίσουμε το c.

11. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει
    α) $f(x) = x + \int_0^2 f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ β) $f'(x) = \int_0^1 f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$

12. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3+6x-45$, $x\in\mathbb{R}$.

13. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\int_0^2 [f(x)+f(t)]dt = 6x^2+12$.

14. Αν $e^{\int_0^1 f(x)dx} = \int_0^1 \left(f(x)+3x^2\right)dx$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Οι ασκήσεις 15-20 λύνονται με αλλαγή μεταβλητής
Θέτουμε $u=f(x)$, τότε $du=f'(x)dx$.
Για $x=\beta$ έχουμε $u=f(\beta)$ και για $x=\alpha$ έχουμε $u=f(\alpha)$.

$$\int_\alpha^\beta g(f(x))f'(x)dx=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} g(u)du$$

15. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 x(x^2+2)^3dx$ ii. $\int_{-1}^2 x^2\sqrt{8-x^3}dx$ iii. $\int_0^1 \frac{x^2}{x-2}dx$

iv. $\int_1^e \frac{2+\ln x}{x}dx$ v. $\int_0^{\pi/3} ημ3x dx$ vi. $\int_0^1 e^{3-2x}dx$

16. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_{-1}^1 x\ln(x^2+1)dx$ ii. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ iii. $\int_0^1 \frac{4x-3}{2x+1}dx$

iv. $\int_1^3 x(x-2)^{10}dx$ v. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx$ vi. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

17. Αν $\int_0^1 xf(x)dx=6$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^3f(x^2)dx$.

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1\big(f(x)+f(x+1)\big)dx=\int_0^2 f(x)dx.$$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x^4}{e^x+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(-x)=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^2 \frac{x^4}{e^x+1}dx$.

20. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2f(x)+2f\left(\frac{2}{x}\right)=2x$ για κάθε $x>0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$.

Οι ασκήσεις 21-25 λύνονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

21. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 xf''(x)dx=f(0)-f(1)$.

22. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ ii. $\int_1^e x^2 \ln x dx$ iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\text{συν}x dx$

iv. $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$ v. $\int_0^{\pi} e^{2x}\text{ημ}x dx$ vi. $\int_0^1 \frac{2x+1}{e^x} dx$

23. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\text{ημ}x}=1$ και $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\text{ημ}x dx=\pi$. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f(\pi)=\pi$.

24. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν $f(0)+f'(0)=1$ και $f(1)+f'(1)=e$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(f''(x)-f(x)\right)e^{-x}dx$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-3x$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}(\alpha)=\int_{\alpha}^0 e^x f(x)dx$ και στη συνέχεια να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha\to-\infty}\mathrm{I}(\alpha)$.

Η άσκηση 26 λύνεται με ανάλυση ενός κλάσματος σε απλά

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{\mathrm{A}}{x-x_1}+\frac{\mathrm{B}}{x-x_2}.$$

26. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_3^4 \frac{x-4}{x^2-2x} dx$ ii. $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$ iii. $\int_0^2 \frac{x+7}{x^2-x-6} dx$

iv. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$ v. $\int_1^3 \frac{x-1}{x^2+x} dx$ vi. $\int_0^2 \frac{3x+2}{x^2+3x+2} dx$

Στις ασκήσεις 27-28 υπάρχουν συνδυασμοί των παραπάνω τεχνικών

27. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

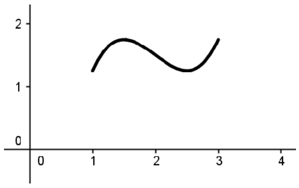
i. $\int_0^{\pi^2} \text{συν}\sqrt{x} dx$ ii. $\int_1^e \text{ημ}(\ln x) dx$ iii. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$

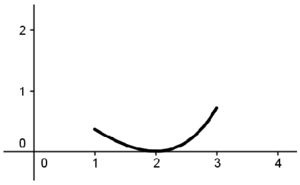
iv. $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ v. $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} dx$ vi. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$

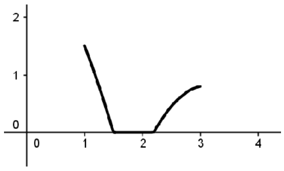
28. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0)=1$ και $f(1)=2$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

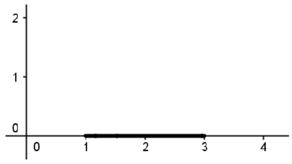
α) $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)} dx$ β) $\int_0^1 f(x)f'(x)e^{f(x)} dx$

Ανισότητες με ολοκληρώματα









- Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha<\beta$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.
- Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha<\beta$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ και το "=" δεν ισχύει για κάθε $x\in\Delta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.
- Έστω f,g δύο συναρτήσεις συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha<\beta$. Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$.
- Έστω f,g δύο συναρτήσεις συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha<\beta$. Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ και το "=" δεν ισχύει πάντα τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

29. Να αποδείξετε ότι $(x+1)\ln(x+1)\geq x$ για κάθε $x>-1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\int_0^1 (x+1)^{x+1}dx>e-1$.

30. Να αποδείξετε ότι $x-\frac{x^3}{6}\leq \text{ημ}x\leq x$ για κάθε $x\geq 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\frac{13}{42}<\int_0^1 \text{ημ}x^2dx<\frac{1}{3}$.

31. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για κάθε $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι $f(\alpha)\ln 2<\int_\alpha^{2\alpha}\frac{f(x)}{x}dx<f(2\alpha)\ln 2$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ με $x>0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι $\int_1^e e^{\frac{1}{x}}dx>e$.

33. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με ελάχιστη τιμή $m=1$ και μέγιστη τιμή $M=2$. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2}<\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx<2$.

34. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να αποδείξετε ότι $f(1)-\frac{1}{2}<\int_0^1 f(x)dx<f(0)+\frac{1}{2}$.

35. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=-1$ και $f(2)=1$.
α) Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)(f(x)+1)\le 0$ για κάθε $x\in[1,2]$.
β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f^2(x)dx \le 1$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε
$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad f(x)+f'(x)>2e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)-e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)<e^x$ για κάθε $x<0$.
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^0 xf(x)dx > \frac{2}{e}-1$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$.
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx<1$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x>0$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(2,f(2))$.
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx > \frac{3e^2}{8}$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (1+\text{ημ}x)f(x)dx<1$.
γ) Να αποδείξετε ότι $xf(2x)<\int_x^{2x} f(t)dt < xf(x)$ για κάθε $x>1$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x} f(t)dt$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι
α) $f(x)-f(0)\le f'(\alpha)x$, για κάθε $x\in[0,\alpha]$.
β) $2\int_0^{\alpha} f(x)dx < \alpha^2 f'(\alpha)+2\alpha f(0)$.

Ολοκλήρωμα παράγουσας - Ολοκλήρωμα αντίστροφης - Εμβαδόν

Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα Δ και έστω $\alpha, \beta \in \Delta$.

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta (x)' F(x)dx = \left[xF(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta xF'(x)dx = \left[xF(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta xf(x)dx .$$

41. Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$ στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = \frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x)dx$.

42. Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $F(x) \geq 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $F(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 xf(x)dx < 1$.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$

- Θέτουμε $u = f^{-1}(x)$
- Λύνουμε ως προς x, δηλαδή $x = f(u)$, και παραγωγίζουμε: $dx = f'(u)du$
- Τα νέα άκρα είναι $u = f^{-1}(\alpha)$ για $x = \alpha$ και $u = f^{-1}(\beta)$ για $x = \beta$

Το ολοκλήρωμα γίνεται $I = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} uf'(u)du$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 2x$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^{2e+1} f^{-1}(x)dx$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ με $x > 0$.
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}}dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x}dx$.

45. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$.

- Εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$
$$E = \int_\alpha^\beta \left|f(x)\right|dx$$
Αν δεν δίνεται κάποιο από τα άκρα λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$
$$E = \int_\alpha^\beta \left|f(x) - g(x)\right|dx$$
Αν δεν δίνεται κάποιο από τα άκρα λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & x<1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-\ln x$, $x>0$.
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\alpha+1$ με $\alpha>0$ είναι $\mathrm{E}(\alpha)=2\alpha+2+\alpha\ln\alpha-(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$.
β) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha>0$ το εμβαδόν $\mathrm{E}(\alpha)$ γίνεται ελάχιστο.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x=2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0=-3$.
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x=\dfrac{3}{5}$.

49. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$ και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}$ με $\lambda>0$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η $y=\lambda e x$.
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης (ε) και του άξονα $y'y$, είναι $E=\dfrac{e-2}{2\lambda}$.

51. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x=-1$.