

1. Συναρτήσεις

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).
- Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A , τότε μπορούμε να βρούμε $x_1, x_2 \in A$ τέτοια, ώστε $x_1 = x_2$ και $f(x_1) \neq f(x_2)$.
 - Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A = [0, 1]$ και σύνολο τιμών $f(A) = [2, +\infty)$ τότε:
 - Το $f(2)$ δεν ορίζεται.
 - Η εξίσωση $f(x) = a$ έχει λύση μόνο αν $a \in [2, +\infty)$.
 - Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f .
 - Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, -f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y' y$.
 - Αν οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δύο συναρτήσεων f, g συμπίπτουν, τότε $f = g$.
 - Αν $f \neq g$, τότε $D_f \neq D_g$.
 - Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Αν οι $C_f, C_{|f|}$ δεν έχουν κοινά σημεία τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in A$.
 - Για δύο συναρτήσεις f, g είναι δυνατόν να ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ και να μην ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$.
 - Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A = [0, 1]$ και σύνολο τιμών $f(A) = [2, +\infty)$ τότε δεν ορίζεται η σύνθεση $f \circ f$.
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
- $f(x) = \sqrt{\ln(x-3)}$
 - $f(x) = \sqrt{2-|x+1|}$
 - $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-|x|}}$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\ln(x-1)}$
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$.
- Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
 - Να εξετάσετε αν ο αριθμός -4 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του y η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση ως προς x .
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$
 - $f(x) = \frac{e^x - 4}{e^x + 1}$
 - $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
5. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι παρακάτω συναρτήσεις:
- $f(x) = \sqrt{x(x+1)}$ και $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}$
 - $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi x$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ και $g(x) = \sqrt{x^2+1}+x$
 - $f(x) = \ln \frac{x-1}{x-2}$ και $g(x) = \ln(x-1) - \ln(x-2)$
- Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 - 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 4, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

Να ορίσετε την συνάρτηση $f + g$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g, g \circ f, f \circ f$.

8. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $2f(x) + f(4-x) = 3g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ii. Αν $f(2-x) = 4x - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τους τύπους των f, g καθώς και τα κοινά τους σημεία.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = \ln x + 1$.

(α) Αν $(g \circ f)(x) = x^2 - 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την συνάρτηση f .

(β) Αν $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x$ για κάθε $x > 0$, να βρείτε την συνάρτηση f .

10. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

(α) Αν $(g \circ f)(x) = e^x$ για κάθε $x \neq 0$, να βρείτε την συνάρτηση f .

(β) Αν $(f \circ g)(x) = e^x$ για κάθε $x \neq -2$, να βρείτε την συνάρτηση f .

11. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

12. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) - 3f(4-x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 0$ και $f(xy) \leq \ln y + f(x)$ για κάθε $x, y > 0$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{x+y} \leq f(x)f(y) \leq f(x+y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .