

2. Μονοτονία συνάρτησης

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).
 - i. Κάθε συνάρτηση f που δεν είναι γνησίως αύξουσα είναι γνησίως φθίνουσα.
 - ii. Η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.
 - iii. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και $0 \in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα Δ .
 - iv. Κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f(0) > f(1)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
 - v. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και ισχύει $f(0) > f(1)$ είναι γνησίως αύξουσα.
 - vi. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}^* .
2. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x} - 2\ln x$ και $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
3. (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$ είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x+1} + (x+1)^3 < 1$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x$.
(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < \frac{1}{x^3} - x^3$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.
(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x^2 + 1} + \sqrt{3 - x} < \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{3 - x}$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \ln x$.
(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln x < x$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^{2x+4} - 1}{e^x}$.
(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x - 4) < 0$.
(γ) Να αποδείξετε ότι $e^{2x^2+4} - 1 \geq (e^4 - 1) \cdot e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + \ln(x^3 + 1)$.
- (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- (β) Να λύσετε την ανίσωση $2(x^2 - 3x + 2) \geq \ln \left[\frac{(3x-2)^3 + 1}{x^6 + 1} \right]$.
9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και η $g \circ f$ γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
10. (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 + 2x$ είναι γνησίως αύξουσα.
- (β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + 2f(x) = e^{1-x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
11. (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
- (β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $\frac{1}{f(x)} - \ln f(x) = x + e^x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + e^{f(x)} = x + 2e^x - 5$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
13. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ .
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x$, με $x > 0$.
- (α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- (β) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
15. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \sin x$ δεν είναι γνησίως μονότονη.
16. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $xf(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.
17. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 1 και ελάχιστο στο -1.
18. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι $\sqrt{2}$ και η ελάχιστη $-\sqrt{2}$.