

### 3. Συνάρτηση 1 – 1. Αντίστροφη συνάρτηση

- Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).
  - Έστω ότι η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1 – 1. Για κάθε  $y \in f(A)$  η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μία λύση.
  - Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι άρτια τότε δεν είναι 1 – 1.
  - Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1 – 1 τότε  $f(f^{-1}(x)) = x$  για κάθε  $x \in A$ .
  - Αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1 τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .
  - Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι 1 – 1 στο  $\Delta$ .
  - Αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1 σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο  $\Delta$ .
- Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1 – 1.  
(α)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ ,      (β)  $f(x) = x^2 + 2x$ ,      (γ)  $f(x) = e^x + x$ ,      (δ)  $f(x) = x^2(x-1)^3 + 4$
- Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  $f(f(x)) = f(x) + 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1 – 1 και να υπολογίσετε το  $f(0)$ .
- Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης  $f \circ g$  είναι 1 – 1. Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι 1 – 1. (2002)
- Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε  $(f(x))^2 + (f(1-x))^2 = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η γραφική παράσταση της  $g$  διέρχεται από το  $A(1,0)$  να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν είναι 1 – 1.
- Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1 – 1 αν και μόνο αν η  $f \circ f$  είναι 1 – 1.
- Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να αποδείξετε ότι είναι 1 – 1 και να ορίσετε την αντίστροφή της:  
(α)  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ ,      (β)  $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,      (γ)  $f(x) = x|x|$ .  
(δ)  $f(x) = x^3$ ,      (ε)  $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \geq 2$ .      (στ)  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ .
- Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^3(x) + 2f(x) - x = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η  $f^{-1}$  και να βρείτε τον τύπο της.  
(β) Αν  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  να λύσετε την εξίσωση  $f(x+10) = x$ .
- Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln x + e^x + x - e, x > 0$ .  
(α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.  
(β) Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = x$ .  
(γ) Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{1}{2} \ln x + e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - e < 1 + e^e$ .

10. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f^{-1}$  είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο  $f(\Delta)$ .
11. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = e^{2x} + x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Δίνεται ότι  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.  
(β) Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = 0$  και την ανίσωση  $f^{-1}(x) > 1$ .  
(γ) Να υπολογίσετε το  $f^{-1}(e^4)$ .  
(δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(x - e^4) - 2) = -1$ .
12. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Έστω  $g$  μια συνάρτηση για την οποία ισχύει  $g(x) = f(x) - f(e^{1-x})$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι 1-1.  
(β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης  $g$ .  
(γ) Να αποδείξετε ότι  $g(f^{-1}(0)) + f(e^{1-f^{-1}(0)}) = 0$ .
13. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(f(x)) = x + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1 - 1.  
(β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) - f^{-1}(x) = 2$  για κάθε  $x \in f(\mathbb{R})$ .  
(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  είναι αδύνατη.
14. Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(xy) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in (0, +\infty)$ .
- (α) Να βρείτε το  $f(1)$ .  
(β) Να αποδείξετε ότι  $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$  για κάθε  $x, y \in (0, +\infty)$ .  
(γ) Αν η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1 - 1.
15. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(f(x)) = x + f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της  $f$ .  
(β) Να βρείτε το  $f(0)$ .  
(γ) Αν το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι:  
i.  $f(x) = x + f^{-1}(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
ii.  $f(f(x) - x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
16. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ , για κάθε  $x \geq 0$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ , για κάθε  $x \geq 0$ .  
(β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την  $f^{-1}$ .  
(γ) Να λύσετε την εξίσωση  $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^3+x-7} + \sqrt{x^3+x-8}) = 1$ .  
(δ) Να λύσετε την ανίσωση  $\sqrt{x^2+1} - |x| > \sqrt{2} - 1$ .