

#### 4. Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).
- Ισχύει η ισοδυναμία  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$ .
  - Ισχύει η ισοδυναμία  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .
  - Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell$  με  $\ell \in \mathbb{R}$  τότε υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .
  - Αν  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  τότε  $\ell > 0$ .
  - Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$  τότε  $f(x) \neq 0$  κοντά στο  $x_0$ .
  - Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  τότε  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ .
  - Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$ .

2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 1 \\ -2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$  και  $g(x) = \begin{cases} -2x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 3 - x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ .

(α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

(β) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} g^2(x)$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$  με  $x \neq 1$ .

(α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in D_f$ .

(β) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

4. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i.	$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{x}{x^3 - 1} \right)$	ii.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}}$
iii.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x} - 3}{x^2 - 1}$	iv.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x + 2\sqrt{x} - 3}$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $|f(x) - 2| \leq x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$                       (β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x+4}}{x}$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) \leq 6xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

7. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 3$  και

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-2}{x} = -1$ . Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$                       (β)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$                       (γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - \sqrt{x+4}}{x^2 - x}$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-\alpha}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\beta x^2 + \gamma x - 1}{x-1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ .

Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ώστε να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και να είναι πραγματικός αριθμός.

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x^2-2x} = 4$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$                       (β)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f^2(x) - 4f(x) + 4 - x + 1}}{|f(x) - 5| - f(x) + 2x - 3}$                       (γ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+7}}{x^2 - 4}$ .

10. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα και τέτοια, ώστε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(2x)} = 1$ .

(α) Να αποδείξετε ότι  $f(2x) < f(3x) < f(4x)$  για κάθε  $x > 0$ .

(β) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{f(4x)}$ .

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x)(f(x)-4x) = x^2(6x-7f(x))$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ .

(α) Να βρείτε τον αριθμό  $\lambda$ .

(β) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2 - 6x}{\sqrt{x+4} - 2}$ .

12. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{\pi}{2x} \eta\mu(x^2 + 2x)(\sigma\upsilon\nu 3x - 1)}{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{1 - 2x^2}}$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $x^2 f^2(x) - 2x f(x) \eta\mu x \leq x^4 - \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$                       (β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta\mu x + \epsilon\phi x}{x^2 + 3x - \eta\mu 5x}$ .