

5. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

i. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f^2(x)}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f^2(x)} = +\infty$.

iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

v. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^3+2x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-7}{x^2-4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{1-\sin x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x \eta \mu x}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 5x}{\eta \mu x^3}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sin x}{x^4}$

viii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-3}{\sin x}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{\eta \mu^2 x} \right)$

x. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-6}{x-4\sqrt{x+4}}$

3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{(x-1)^2}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{x^3-1}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{-x^3+3x-2}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{\ln x + x - 1}$

4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\lambda^2 - \lambda x + 3}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 3f(x)}{f(x) + 2}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f^3(x) - 3f(x) + 1}{2f^3(x) + 5f^2(x) - 6}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4x + 4)f(x)] = -4$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} [(xf(x) - 2f(x))(\sqrt{x^2 - 3} - 1)]$.

7. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

(β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(x)}{\sqrt{x+4}-2} = -3$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) - 5f(x) + 3}{f^3(x) + 2f^2(x) - 7}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x-3} = -2$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4f(-2x)}{x}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = +\infty$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x) - 4}{f^2(x) - 2f(x) + 1}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x)}{x-3} = +\infty$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 1} [f^2(x) + 3f(x)]$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) + 3f(x)| + f^2(x) - 2}{f^2(x) - 3f(x) + 1}$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{f(x)}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x) \geq x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(f(x) - 2016) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(\sqrt{4x-x^2}-2)}{x-5} = 1$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\sqrt{4f^2(x) - 8f(x) + 7} - 2f(x) \right]$.