

6. Όρια συνάρτησης στο άπειρο

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

i. Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_\nu x^\nu.$$

ii. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{-x} = 0$.

iii. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

iv. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu = -\infty$.

2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^{x+1} + 3^{x+2}}{7^x - 3^{x+1}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^{x+1} + 3^{x+2}}{7^x - 3^{x+1}}$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2 + 3x}{x-5}}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 2) - x]$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{x} + \eta\mu x \right)$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}$

ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{\ln x}$

x. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2 - 2x - 4}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\eta\mu x \leq f(x) \leq x + 1$ για κάθε $x \geq 0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\left| f(x)\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x(f(x) + 1) \right| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f^2(x) - 3f(x) + 2} - f(x)}{2f(x) - 1}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = 3$. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + 7x}{xf(x) - 4x^2 + 2x + 1}$.

6. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 2} + \alpha x + \beta \right) = 5$.

7. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + \alpha x + \beta \right) = -4$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{6x^3 + \alpha x^2 - 5}{2x^2 - 3x + 1}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

(β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = 2$ να βρείτε την τιμή του α .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [xf(x)]$.

(γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\eta\mu x \cdot f(x)]$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(e^x + 1)f(x) \geq 3^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

11. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x^2 + \lambda x - 7}{2x - 5} + \lambda x \right)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{x}{f^2(x) + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)\eta\mu\sqrt{x}}{x^4}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1 - e^x) - \ln(2 + e^x)$ για κάθε $x < 0$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{f^{-1}(x)} - e^{f(x+1)} \right)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 6$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^2 - 1) \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right) - 2}{6x + 5} \right].$$