7. Συνέχεια συνάρτησης – Θεώρημα Bolzano

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x)+g^2(x)=\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $|f(x)|\le|\eta\mu x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(β) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο 0.

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $x(f(x)+1)=f(x)+x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 0. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1+f(0)$ να βρείτε το $f(0)$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+f^2(x)}{f(x)+x}$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<M$, για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ με $x\ne y$, όπου M θετικός αριθμός.
(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-Mx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)<g(x)<2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.
(α) Να αποδείξετε ότι $f(0)>0$.
(β) Να αποδείξετε ότι η g δεν είναι συνεχής στο 0.

6. Έστω $f(x)=\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{x^h+2^{h+1}}{x^{h+1}+x^2 2^h}$, με $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{\eta\mu x}=+\infty$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\varepsilon\varphi x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$.
(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$.
(β) Αν x_0 είναι ο αριθμός του (α) ερωτήματος να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=3x_0^2+1$.

10. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=xe^x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

11. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $f(1)=-1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=xe^x-1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}=-1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-1}+\dfrac{f(1-x)}{x}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $f^3(x_0)-x_0f^2(x_0)=x_0-x_0^2$.

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x_0^2+f(1)x_0+f(1)f(2)=0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^xf(x)-f(1)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.

16. Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=f(1)x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=\dfrac{1}{2}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x(2-x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\alpha x^2+\beta x-1$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
(α) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ετερόσημες ρίζες.

19. Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2x+1)=x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

20. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=f(4)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+f(2x)=2f(x+2)$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

21. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[2,4]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\eta\mu x)+\eta\mu(f(x))=4x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(1)f(x)+x}{x^2-4}=\alpha\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $g(x)=f^2(x)-2f(x)+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι συνεχής και $f^2(0)+f^2(2)=4f(2)-4$. Να αποδείξετε ότι:
(α) η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από τον $x'x$.
(β) $f(0)=0$ και $f(2)=2$.
(γ) η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

24. Έστω μια συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(0)=0$, $f(1)=1$ και $(f(x))^3-f(x)=x^2-x$, για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι:
i) η f δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{1}{2}$.
ii) η f δεν είναι συνεχής.

25. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $f(0)<f(2)<f(1)$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

26. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $(f(x))^2+xf(x)\geq e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0,1) να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

27. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0)=1$ και $f^2(x)=x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

28. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0)=1$ και $f^2(x)=1-2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

29. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0)=0$ και $e^{f(x)}+2x=e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

30. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f^2(x)=x^2-2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.