8. Η έννοια της παραγώγου

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\text{συν}x+x^2\text{ημ}|x|$ στο σημείο $x_0=0$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2\text{ημ}^2 x}$ με $x\in(-\pi,\pi)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$ και τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}-1}=2$. Αν $g(x)=x\cdot f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-xf(1)}{x^2-x}=f'(1)-f(1)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ και τέτοια ώστε $f^3(x)+(1-x^2)f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $f(0)=0$.
   (β) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{xf(x)+1}{f^2(x)+1}$ για κάθε $x\neq 0$.
   (γ) η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$ και τέτοια ώστε $(x^2-1)f^2(x)+f(x)=x^2+2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $f(0)=0$ και $f'(0)=4$.
   (β) $f'(x)=4+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράγωγος συνάρτηση – Κανόνες παραγώγισης

8. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη. Να βρείτε την $g'(x)$ και την $g''(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $g(x)=f(x^3)$	ii. $g(x)=\ln f(x)$	iii. $g(x)=f(\text{ημ}x)$	iv. $g(x)=\sqrt{f(x)}$
v. $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$	vi. $g(x)=f(e^x)$	vii. $g(x)=f^3(x)$	viii. $g(x)=\text{ημ}\left[f(x)\right]$
ix. $g(x)=f(\sqrt{x})$	x. $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$	xi. $g(x)=e^{f(x)}$	xii. $g(x)=f(\ln x)$

9. Για τη συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=1$ και $f'(\alpha)=0$ για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν $g(x)=x^2f(x)+\dfrac{e^x}{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $g'(\alpha)=2\alpha+e^{\alpha}$.

10. Έστω f μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(4)=-2$ και $f''(4)=1$. Αν $g(x)=xf(x^2)$ για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι $g''(2)=8$.

11. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $\ln|f(x)|=xf(x)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ ή $f(0)=-1$.
(β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.
(γ) Να αποδείξετε ότι $f''(0)=3$ ή $f''(0)=-3$.

12. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $e^{f(x)}+xf(x)=e$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f''(0)=\dfrac{1}{e^2}$.

13. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)\ln f(x)=ex$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=e$ Να αποδείξετε ότι $f'(1)=\dfrac{e}{2}$.

14. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $4x^2f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\dfrac{1}{2\alpha}\ln\left(\dfrac{1+e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}\right)$ όπου $\alpha>0$, $x>0$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x}-1}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$ με $x\geq 0$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $x>0$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο 0.

19. Αν $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ να αποδείξετε ότι $f^3(x)\cdot f''(x)=-1$ για κάθε $x\in(0,2)$.

20. Αν $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ με $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι $x^3f''(x)=[xf'(x)-f(x)]^2$.

21. Αν $f(x)=e^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}$ να αποδείξετε ότι $xf''(x)+\dfrac{1}{2}f'(x)=\dfrac{1}{4}f(x)$, για κάθε $x>0$.

Εξίσωση εφαπτομένης

22. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1)=0$ και τέτοια, ώστε $f(1+x)-f(1-x)=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$.
(β) Αν $f'(0)\neq 1$ να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $\mathrm{B}(0,f(0))$ και $\Gamma(2,f(2))$ τέμνονται σε ένα σημείο με τετμημένη 1.

23. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$ και συνεχή παράγωγο στο $x_0=0$ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x)+f'(x)\text{ημ}x$ στο $x_0=0$ είναι $y=2f'(0)x$.

24. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε $f(0)+f'(0)<1$ και $f(1)>1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,1)$.

25. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε $f(0)<0<f(1)+f'(1)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=xf(x)+1$ έχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y=2x+1$. Να αποδείξετε ότι:.
(α) η ευθεία ε έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με την C_f.
(β) η ευθεία ε εφάπτεται στην C_f σε ένα από τα παραπάνω σημεία.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^x$. Η ευθεία ε με εξίσωση $y=x+\kappa$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$, εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\kappa=1$.
(β) η ευθεία ε εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της $g(x)=f^{-1}(x)+2$, $x>0$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$. Η ευθεία ε με εξίσωση $y=\lambda x-2$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.
(α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=3$.
(β) Να βρείτε το σημείο επαφής Α της ε με την C_f.
(γ) Να αποδείξετε ότι η ε έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την C_f.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{\alpha-x}$ με $x\neq\alpha$ και $g(x)=e^{-\beta x}$ με $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τους αριθμούς α,β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f,g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha$ με $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\dfrac{\beta}{x}$ με $x\neq 0$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y=4x+4$ η οποία εφάπτεται στις C_f και C_g.
(α) Να βρείτε τους αριθμούς α,β.
(β) Να βρείτε τα σημεία επαφής της ε με τις C_f και C_g.
(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\circ f$ και η ευθεία ε έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(-2,-1)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $(x_0,1)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι
(α) $f'(x_0)=-f(x_0)$ και $f(x_0)=e^{-x_0}$.
(β) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο x_0+1.

(2004)

32. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda\neq 0$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(2005)

33. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $\mathrm{A}(\alpha,\ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $\mathrm{B}(\beta,e^{\beta})$ με $\beta\in\mathbb{R}$, ταυτίζονται να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x=0$.

(2006)