9. Θεώρημα Rolle

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).
   i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$ τότε υποχρεωτικά $f(\alpha)=f(\beta)$.
   ii. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.
   iii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι 1 – 1 τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.
   iv. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία λύση.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) Μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'.
   (β) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει μια το πολύ ρίζα της f.

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-1)=f(1)=3$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) Η εξίσωση $x^2f(x)+x-1=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$.
   (β) Η εξίσωση $2xf(x)+x^2f'(x)+1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν $f'(1)=-2f(1)$ και η ευθεία $y=-x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της C_f στο $x_0=-1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2xf(x)+x^2f'(x)+1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(0)x^3+f(1)x+3=0$ έχει τρεις ρίζες να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\beta-\xi}$.

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=-1$, $f(2)=2$ και $f(3)=-3$.
   (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(1,3)$.
   (β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x)+xf'(x)=0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:[2,3]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και τέτοια ώστε $2f(3)=3f(2)$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(2)+f(3)-f(x)}{5-x}$, $x\in[2,3]$ δεν είναι 1 – 1.
   (β) Υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=g(\xi)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και τέτοια ώστε $f(2)=2f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-3f(1)}{\xi-3}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και τέτοια ώστε $f(1)=2f(2)=3f(3)$. Να αποδείξετε ότι:
(α) Η εξίσωση $f(x)+xf'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1,3)$.
(β) Υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=-2\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$.

11. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=f'(0)=0$. Έστω g η συνάρτηση με $g(x)=(1-x)f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις g και g' δεν είναι 1 – 1.
(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $(1-\xi)f''(\xi)=2f'(\xi)$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0$.

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Αν $f(0)=f(1)-2$ και $f'(0)>0$ να αποδείξετε ότι:
(α) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4\xi$.
(β) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=5x_0$.

14. Έστω f,g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $g(x)=(x-1)f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να αποδείξετε ότι
(α) η γραφική παράσταση της g έχει δύο τουλάχιστον κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
(β) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\xi)}{\xi-1}+f'(\xi)=0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=e^{\beta}$, $f(\beta)=e^{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ και ισχύει $f(1)=4f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

18. Έστω $f, \mathrm{H}:[0,1] \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις. Έστω $\dfrac{f'(x)}{\mathrm{H}'(x)} = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,1)$, $\mathrm{H}(1) = f(1)$, $\mathrm{H}(0) = 0$, $\mathrm{H}'(0) = f(0)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{H}(x)}{x} - f(x), & \text{αν } x \in (0,1] \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}.$$
(α) Να αποδείξετε ότι η G είναι συνεχής στο $[0,1]$.
(β) Να αποδείξετε ότι $G'(x) = -\dfrac{\mathrm{H}(x)}{x^2}$ για κάθε $x \in (0,1)$.
(γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0,1)$ ώστε $\mathrm{H}(\alpha) = 0$.

Θεώρημα μέσης τιμής

19. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $e^{\alpha}(\beta - \alpha) < e^{\beta} - e^{\alpha} < e^{\beta}(\beta - \alpha)$.

20. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

21. Να αποδείξετε ότι $\text{ημ}2x - \text{ημ}x > x\text{συν}2x$, για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

22. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $f(4x) - f(2x) < 2xf'(4x)$, για κάθε $x > 0$.
(β) Αν $f(2) = 0$ να αποδείξετε ότι $(x-2)f'(x) - f(x) > 0$, για κάθε $x > 2$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0) = \alpha > 0$ και $f(1) = 0$.
(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \alpha x_0$.
(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \alpha^2$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(-1) = f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:
(α) υπάρχουν $\xi_1 \in (-1,0)$ και $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) = f(0)$ και $f'(\xi_2) = -f(0)$.
(β) υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιος ώστε $|f''(\xi)| \geq |f(0)|$.

25. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(-1) = f(1) = 0$ να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(2) < 0$.

26. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\ \beta)$ και τέτοια, ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\ \beta)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)>0$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f(1)\neq 0$.
(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $\dfrac{f(x_0)}{1-x_0}=f(0)+f(1)$.
(β) Αν $f(0)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=f^2(1)$.

28. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$. Αν τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha,f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η f' δεν είναι 1 – 1.

29. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ και η συνάρτηση g για τις οποίες ισχύει $f(x+1)-f(x)=(x^2+x)g(x)+\mathrm{e}$ για κάθε $x\in[-1,\,0]$.
(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1\in(-1,\,0)$ και $x_2\in(0,\,1)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)$.
(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,\,1)$ τέτοιος, ώστε $f''(\xi)=0$.

30. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(1)=f(0)+1$.
(α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.
(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι, ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

31. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f'(0)=-1$ και $\left|f''(x)\right|<\dfrac{1}{4}$ για κάθε $x\in[-2,2]$.
(α) Να αποδείξετε ότι $\left|f'(x)+1\right|<\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x\in[-2,2]$.
(β) Αν $f(-2)=4$ να αποδείξετε ότι $\left|f(2)\right|<2$.

32. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που η παράγωγός της είναι γνησίως αύξουσα.
(α) Να αποδείξετε ότι $f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(β) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lambda$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

33. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha-1,\alpha+1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(\alpha-1)>\alpha-1$, $f(\alpha)<\alpha$ και $f(\alpha+1)>\alpha+1$.
(α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δύο τουλάχιστον κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)-1=f(x)-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\alpha-1,\alpha+1)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha-1,\alpha+1)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)<1<f'(\xi_2)$.

(δ) Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha-1,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$.

34. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν $\gamma,\delta\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(\gamma)f(\delta)<0$ να αποδείξετε ότι:

(α) υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).

(β) υπάρχουν σημεία $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

(Μάιος 2003)