ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

1ΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ 26 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και
- $f\left(\alpha\right)\neq f\left(\beta\right)$,

τότε να αποδείξετε ότι:
Για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f\left(\alpha\right)$ και $f\left(\beta\right)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιος, ώστε $f\left(x_0\right)=\eta$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε ονομάζουμε συνεχή μια συνάρτηση σε ανοιχτό διάστημα $\left(\alpha,\beta\right)$ και πότε σε κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$;

Μονάδες 7

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.

Μονάδες 2

β) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

γ) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=0$.

Μονάδες 2

δ) Αν $0<a<1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x=0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z\neq 1$ και $w=\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$.

Β1. Να βρεθεί ο μιγαδικός w όταν $z=2$ και να αποδείξετε ότι ο w^{2004} είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

Β2. Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του w βρίσκεται σε ευθεία.

Μονάδες 8

Β3. Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=1$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν z,w είναι μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $f^{-1}(0)+f^{-1}\left(\ln\left|z+\overline{w}\right|\right)=\dfrac{7}{6}$ να αποδείξετε ότι:

α) $\left|z+\overline{w}\right|=2$.

Μονάδες 5

β) $\left|\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)\right|\le 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $g(x)\cdot\left(f^2(x)-e^x\right)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\left|f(0)\right|<1.$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f^2(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f^2(x)<e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αρνητικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $x_0\cdot g(x_0)=1+\dfrac{1}{x_0^2}$.

Μονάδες 5

Δ6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{x^3\cdot g(x)}}{e^{x^2}}$ όπου x_0 ο αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30΄** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ