

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
1<sup>ο</sup> ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 20 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

**Μονάδες 9**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφεται κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 6**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας πολυωνυμικής συνάρτησης  $f$  περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

β) Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$  και η  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο  $[\alpha, \beta]$  τότε η  $f$  παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

γ) Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

$x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$  του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.

- δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική.
- ε) Το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = f'(0) = 0$ .

Δίνεται ακόμη η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $g'(x) = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^2 e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 8**

**B4.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{1}{e^2}$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(xy) = xf(y) + yf(x)$  για κάθε  $x, y \in (0, +\infty)$ .
- $f'(1) = 2013$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(1) = 0$ .

**Μονάδες 3**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + 2013$ .

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2013x \ln x$ ,  $x > 0$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι  $x^{ex} \geq \frac{1}{e}$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 6**

**Γ5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Για την  $f$  ισχύουν  $f(0) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [0,1]$  και  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $F : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{\int_0^x f(t)dt}, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x = 0 \end{cases}.$$

**Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $F$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 3**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $F(x) < \frac{1}{f(x)}$  για κάθε  $x \in (0,1]$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $F$  είναι 1 – 1.

**Μονάδες 5**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι  $\int_2^3 F^{-1}(t)dt = \int_0^1 tF'(t)dt$ .

**Μονάδες 4**

**Δ6.** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 F(t)dt > F\left(\frac{1}{2}\right) - \int_2^3 F^{-1}(t)dt$ .

**Μονάδες 4**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30'** πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**