

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ 1ου ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 31 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$.

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

γ) Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $f(x)(g(x)-1) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύουν οι σχέσεις

$$f(0) = -3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 8

B2. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

B3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = x_0$.

Μονάδες 8

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{f(x)}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει

$$\left| \frac{\bar{z}_1 - 3}{z_1 + 3} \right| = 1 \text{ και } \left| \frac{2z_2 - 2i}{\bar{z}_2 + 2i} \right| = 2, \quad z_1 \neq -3, \quad z_2 \neq 2i. \quad (1)$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο z_1 είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z_2 .

Μονάδες 6

Γ3. Αν η εικόνα του z_1 ανήκει και στην ευθεία $x + y = 2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z για τους οποίους ισχύει $|z - z_1 - \sqrt{5}| = 2\text{Im}(z_2)$ είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

Γ4. Έστω z_1, z_2 μιγαδικοί που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) με $\text{Im}(z_1) = \text{Re}(z_2) = x$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |z_1 - z_2|$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + \frac{9}{4}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x\sqrt{2})$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύει η σχέση

$$|2\bar{z} - iw|^2 = 4|z|^2 + |w|^2 + 4\text{Im}(zw).$$

Μονάδες 6

Δ2. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και έχει σύνολο τιμών το ανοιχτό διάστημα $(0, +\infty)$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = -1 + f(1)i$ και $w = -4 + f^{-1}(1)i$ για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$|z|^2 + \frac{1}{4}|w|^2 = -\text{Im}(zw).$$

α. Να αποδείξετε ότι $\bar{w} = 2iz$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = f(2x - f(x)) - x$ είναι γνησίως φθίνουσες στο \mathbb{R} .

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x - f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 2}{1 - f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)\eta\mu\sqrt{x}]$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 13.00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ