

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ 1ου ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ 25 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

A2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $f'(x) = xa^{x-1}$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ) Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ

και $\alpha \in \Delta$, τότε $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.

- ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν G είναι παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta).$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(0) = 1$.
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $2f'(x) = f(x) + \frac{x-1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ακόμη η συνάρτηση g με $g(x) = \alpha x e^{-x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(0, g(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(2, -2)$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $g'(x) = (x-1)e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

B2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{e^x - x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\Gamma(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0, 1)$ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 .

Μονάδες 5

B5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f^2(x)(1 - e^x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση για τη οποία ισχύουν οι σχέσεις

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $2e^{3-x} + (x-3) \int_1^{2x-1} f(t) dt \leq 2 + \ln(x-2)$ για κάθε $x > 2$

Έστω συνάρτηση g με $g(x) = \int_2^x [f(t+2) + f(4-t)] dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\int_1^5 f(x) dx = 3$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g .

Μονάδες 5

Γ3. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g' τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 3$.

Μονάδες 5

Γ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in (1,5)$ τέτοιος ώστε

$$\ln \mu \cdot f(\mu) + \frac{1}{\mu} \int_5^\mu f(t) dt = -2.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(1) = 1$
- $f(x) > -\ln x$ για κάθε $x > 0$
- $\frac{f'(x) + \frac{1}{x}}{2f(x) + \ln x^2} = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

Έστω ακόμη η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g .

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi) + g(\xi) = \frac{e^3 - e - 1}{(e-1)\xi}.$$

Μονάδες 5

Δ5. Δίνεται η συνάρτηση $H(x) = \int_0^x \left(1 + \int_1^{t+1} e^{-2015u} f(u^{2014} + 1) du \right) dt$ με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_H στο σημείο $M(0, H(0))$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ