ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ 1ου ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 11 ΜΑΡΤΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 8

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι 1 - 1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

β) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ.

ε) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό η υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 4

Β2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο της με τεταγμένη 1.

Μονάδες 4

Β3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{-x})-e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\ln(1+e)-2$.

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=xf(x)$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη ενώ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Μονάδες 4

Β5. Αν ισχύει $f(x)-\ln(x+1)\geq \alpha(x-e)-1$ για κάθε $x>0$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 4

Β6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-\ln 2}{h^{2017}}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με

- $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $f(1)=\dfrac{1}{e}$, $g(1)=0$,
- $(f'(x)-e^{-x})g(x)+2x=\dfrac{f'(x)}{f(x)}-(f(x)+e^{-x})g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\dfrac{\ln f(x)-x^2+2}{f(x)+e^{-x}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-g(x)}{e^x-1}=2$ να αποδείξετε ότι $g(0)=1$ και $f(0)=1$.

Μονάδες 6

Για τα ερωτήματα **Γ3.** και **Γ4.** δίνεται, επιπλέον, ότι $f(0)=g(0)=1$ και $g(-1)<0$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(-1,0)$ ώστε $f(x_0)=e^{x_0^2-2}$.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(x_0,0)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(\xi+1,f'(\xi)+\dfrac{1}{2}\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $f(x)f'(x)=\dfrac{x(x^2+2)}{f^2(x)+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $f(0)=1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $e^x<\dfrac{e^{f(x)}-e^x}{f(x)-x}<e^{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Έστω h μία συνάρτηση με $h(x)=\sqrt{2}f(x)+e^{1-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h'\left(\dfrac{2e^x}{h(x)}-\dfrac{1}{2e^{-x}}\right)=-e$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες x_1,x_2.

Μονάδες 5

Δ5. Αν για τους αριθμούς x_1,x_2 του ερωτήματος **Δ4.** ισχύει $x_1<x_2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x^2+1)h'(x)=2e^4xe^{-h(x)}-2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1,x_2).

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 12.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ