

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ 1ου ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ

ΤΡΙΤΗ 21 ΜΑΡΤΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τις συναρτήσεις $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g:B \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $A \cap B = \emptyset$ τότε δεν ορίζεται η συνάρτηση $f + g$.

β) Για κάθε ακέραιο αριθμό $v \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$.

γ) Το τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

δ) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ τότε $f'(x_0) = 0$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 4

B3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο κοινό σημείο της με την ε έχει με την C_f και δεύτερο κοινό σημείο.

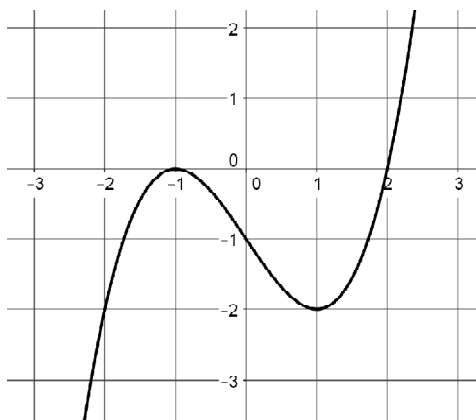
Μονάδες 6

B4. Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g . Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)].$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

Μονάδες 9



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{f(x) + \frac{1}{x}}$ για κάθε $x \neq 0$,
- $f(-1) = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$,
- $f'(1) = \frac{e}{e+1}$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln\left(e^{\frac{1}{x}} + 1\right)$, $x \neq 0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε την τιμή του $\alpha < 0$ για την οποία η εξίσωση $e^{\frac{1}{x}} - e^{-\alpha} + 1 = 0$ είναι αδύνατη.

Μονάδες 5

Γ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιοι, ώστε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \ln \frac{(e^2 + 1)^2}{(e + 1)(\sqrt{e} + 1)}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(1 - e^{-x})f'(x) + e^{-x}f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{e^x - 1}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}.$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(\eta\mu x)}$.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty.$$

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(-x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x) - f(-x)}$.

Μονάδες 5

Δ5. i. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{xe^x}{e^x - 1} > \frac{1}{2}x + 1$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 12.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ