

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Α. ΦΩΤΙΑΔΗΣ

ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

**ΘΕΜΑΤΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΜΕΤΡΗΣΙΜΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών

Η/Υ

της Πολυτεχνικής Σχολής

του Δημοκρίτειου Πανεπιστήμιου Θράκης

ΞΑΝΘΗ 2001

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Α. ΦΩΤΙΑΔΗΣ

ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

**ΘΕΜΑΤΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΜΕΤΡΗΣΙΜΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ
ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών

Η/Υ

της Πολυτεχνικής Σχολής

του Δημοκρίτειου Πανεπιστήμιου Θράκης

ΞΑΝΘΗ 2001

ΣΤΟΥΣ ΓΟΝΕΙΣ ΜΟΥ

Ευχαριστίες

Στον πρώην πρόεδρο της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Μωυσή Μπουντουρίδη, επιθυμώ να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες, τόσο για την υπόδειξη του θέματος, όσο και για την πολύτιμη επιστημονική βοήθεια και καθοδήγηση την οποία μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της παρούσας διατριβής.

Τις θερμές μου ευχαριστίες και τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω στον νυν πρόεδρο της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Γαρύφαλο Παπασχοινόπουλο, για την άριστη επιστημονική συνεργασία που είχα μαζί του και για την αμέριστη ηθική συμπαράσταση που μου παρείχε. Χωρίς τη δική του στήριξη και το καθημερινό ενδιαφέρον η παρούσα εργασία δεν θα είχε πραγματοποιηθεί.

Ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Ιωάννη Σχοινά, για τον πολύτιμο χρόνο του που μου χάρισε και για τις ουσιαστικές παρεμβάσεις του ως μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής. Η προσεχτική του ανάγνωση της διδακτορικής διατριβής και οι πολύτιμες υποδείξεις του συνέβαλαν θετικά στην τελική μορφή της.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή κ. Sebastian van Strien του πανεπιστημίου του Warwick, για την πολύτιμη και εποικοδομητική επιστημονική βοήθεια που μου προσέφερε κατά επίσκεψή μου στο πανεπιστήμιο του Warwick.

Τέλος επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν με οποιονδήποτε τρόπο στην ερευνητική μου προσπάθεια και στην εκπόνηση της διατριβής αυτής.

Ξάνθη, Μάιος 2001

N. A. Φωτιάδης

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Βασικοί ορισμοί και βοηθητικές προτάσεις	7
2.1	Τοπολογική δυναμική	7
2.2	Μετρήσιμη δυναμική	13
3	Τοπολογική ισοδυναμία	17
3.1	Τοπολογική ισοδυναμία κατά τμήματα μονότονων απεικονίσεων	17
3.2	Απεικονίσεις με αριθμήσιμη διαμέριση	25
3.3	Τοπολογική εντροπία για συνεχείς απεικονίσεις	28
3.3.1	Υπολογισμός της τοπολογικής εντροπίας για συνεχείς απεικονίσεις της M	28
3.3.2	Παράδειγμα	31
3.3.3	Τοπολογική εντροπία μιας ιδιαίτερης υποκλάσης της M_∞	33
4	Κατά τμήματα γραμμικές απεικονίσεις	39
4.1	Γενικά	39

4.2	Η περίπτωση $\lambda_1 > 1$ και $-1 < \lambda_2 < 0$	47
4.3	Η περίπτωση $0 < \lambda_1 < 1$ και $\lambda_2 < -1$	55
4.4	Παραδείγματα	63

Βιβλιογραφία	69
---------------------	-----------

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Παρόλο που τα προβλήματα της δυναμικής έχουν απασχολήσει τους ανθρώπους εδώ και χιλιάδες χρόνια, η συστηματική μελέτη της δυναμικής ξεκινάει ουσιαστικά με τις εργασίες του Νεύτωνα. Η κύρια συμβολή του ήταν η μοντελοποίηση της κίνησης των ουρανίων σωμάτων με εξισώσεις. Καθώς η μελέτη της κίνησης περιλαμβάνει έννοιες όπως ταχύτητα και επιτάχυνση, οι εξισώσεις αυτές ήταν διαφορικές εξισώσεις.

Οι επόμενες γενιές των επιστημόνων επέκτειναν τη μέθοδο του Νεύτωνα στην περιγραφή της εξέλιξης φυσικών φαινομένων με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων. Όμως ένα σημαντικό μειονέκτημα της παραπάνω μεθόδου είναι ότι, γενικά, δεν είναι εύκολο να βρεθεί αναλυτική λύση των διαφορικών εξισώσεων, ακόμη και όταν αυτές είναι αρκετά απλές, διότι γενικά είναι μη γραμμικές. Αυτό το γεγονός οδήγησε στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων, όπως είναι, για παράδειγμα, οι εξισώσεις διαφορών.

Στις περιπτώσεις που ήταν δυνατή η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, που περιγράφουν την εξέλιξη των φυσικών φαινομένων, παρατηρή-

θηκε ότι, αν η λύση παραμένει σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου, τότε υπάρχουν δύο είδη εξέλιξης. Είτε υπάρχει συγκέντρωση σε μια σταθερή κατάσταση, ή υπάρχει κάποιο είδος ταλάντωσης. Στα μέσα της δεκαετίας του 1970 αποδείχτηκε ότι υπάρχει ένα τρίτο είδος εξέλιξης, το οποίο είναι παράξενο και ακανόνιστο. Αυτή η εξέλιξη επικράτησε να λέγεται χαοτική.

Ένα συνεχές δυναμικό σύστημα πάνω στον μετρικό χώρο X είναι μια οικογένεια $\{\varphi_t : t \in \mathbb{R}\}$ ομοιομορφισμών του X , τέτοια ώστε η απεικόνιση $(t, x) \rightarrow \varphi_t(x)$ είναι συνεχής και $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t \circ \varphi_s(x)$, για κάθε $x \in X$ και $t, s \in \mathbb{R}$.

Ένα διακριτό δυναμικό σύστημα πάνω στον μετρικό χώρο X είναι μια οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ομοιομορφισμών του X , ή μια οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ συνεχών απεικονίσεων τέτοια ώστε η απεικόνιση f^0 είναι η ταυτοτική, $f^1 = f$ και $f^{n+m}(x) = f^n \circ f^m(x)$, για κάθε $x \in X$ και κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ένα συνεχές δυναμικό σύστημα προκύπτει από τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$\frac{d}{dt}x = F(x), \quad (1.1)$$

όπου $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ και $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση. Αυτό συμβαίνει γιατί για κάθε αρχικό σημείο $x_0 \in D$ υπάρχει λύση $\varphi_t(x_0)$ για την οποία $\varphi_0(x_0) = x_0$ και $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t \circ \varphi_s(x)$.

Υπάρχουν, γενικά, δύο τρόποι να αντιστοιχίσουμε μια διαφορική εξίσωση της μορφής (1.1) σε ένα διακριτό δυναμικό σύστημα. Ο πρώτος τρόπος είναι η μέθοδος της διακριτοποίησης του χρόνου. Έστω $t_0 > 0$, αρκετά μικρό, και $\varphi_{t_0}(x)$ η λύση της (1.1), τότε έχουμε προσεγγιστικώς $x_{n+1} = x_n + t_0 F(x_n)$, όπου $x_n = \varphi_{nt_0}(x_0)$. Οι επαναλήψεις της συνάρτησης $f(x) = x + t_0 F(x)$ αποτελούν ένα διακριτό δυναμικό σύστημα.

Ο δεύτερος τρόπος χρησιμοποιείται αν η διαφορική εξίσωση (1.1) έχει περιοδική λύση, δηλαδή, αν $\varphi_T(x_0) = x_0$, για κάποιο $x_0 \in X$ και $T > 0$. Τότε θεωρούμε μια υπερεπιφάνεια S εγκάρσια στην καμπύλη $t \mapsto \varphi_t(x_0)$ και μια γειτονιά $U \subset S$ του x_0 . Σε κάθε $y \in U$ αντιστοιχούμε την επόμενη τομή της υπερεπιφάνειας S με την τροχιά $\{\varphi_t(y)\}$. Αν y' είναι αυτή η πρώτη τομή, τότε έχουμε την απεικόνιση $g : U \rightarrow S$ με $g(y) = y'$. Οι επαναλήψεις της g είναι ένα διακριτό δυναμικό σύστημα.

Στην παρούσα διατριβή ενδιαφερόμαστε για διακριτά δυναμικά συστήματα που προκύπτουν από τις επαναλήψεις f^n των απεικονίσεων $f : I \rightarrow I$, όπου I είναι ένα κλειστό διάστημα του \mathbb{R} . Θα αναφέρουμε ως μονοδιάστατη δυναμική, τη δυναμική αυτών των απεικονίσεων. Με την εργασία του May [28] έγινε αντιληπτό ότι οι επαναλήψεις απεικονίσεων διαστημάτων έχουν, σε ορισμένες περιπτώσεις, πολύ σύνθετη δυναμική. Ακόμη, το 1964 ο Sarkovskii [38] απέδειξε το πολύ γνωστό θεώρημα ότι η ύπαρξη περιοδικής τροχιάς περιόδου 3, συνεπάγεται την ύπαρξη περιοδικής τροχιάς οποιασδήποτε περιόδου.

Οι επαναλήψεις των συναρτήσεων που απεικονίζουν ένα διάστημα στον εαυτό του αποτέλεσαν, αρχικά, μοντέλα για βιολογικά συστήματα, ενώ αργότερα, χρησιμοποιήθηκαν ως μοντέλα σε πολλές φυσικές επιστήμες καθώς επίσης και σε οικονομικές επιστήμες.

Ακόμη, μεγαλύτερης διάστασης δυναμικά συστήματα ανάγονται συχνά σε μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι απεικονίσεις Lorenz που είναι το γεωμετρικό μοντέλο των εξισώσεων Lorenz. Μια απεικόνιση Lorenz $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ έχει μια ασυνέχεια στο $x_0 = 0$ και δύο κλάδους στους οποίους είναι γνησίως αύξουσα [4, 20].

Το κύριο ερώτημα σε ένα διακριτό δυναμικό σύστημα είναι ποιά είναι

η ασυμπτωτική συμπεριφορά των επαναλήψεων f^n , για μεγάλες τιμές του n . Την απάντηση σ' αυτό το ερώτημα την προσεγγίζουμε με τοπολογικές μεθόδους ή με μεθόδους της θεωρίας μέτρου (εργοδική θεωρία). Μια τοπολογική περιγραφή της δυναμικής συνεχών απεικονίσεων έγινε με τις εργασίες των Guckenheimer [17, 18], de Melo & van Strien [29, 30], Blokh & Lyubich [6, 7, 24] και Martens, de Melo & van Strien [27]. Η εργοδική περιγραφή της δυναμικής των συνεχών απεικονίσεων γίνεται στις εργασίες των Guckenheimer & Johnson [19], Keller [22] και Lyubich & Milnor [25].

Ένα από τα σημαντικότερα ερωτήματα στην περιοχή των δυναμικών συστημάτων είναι πότε θεωρούμε ισοδύναμα δύο δυναμικά συστήματα. Από το 1880 ο Poincaré είχε αποδείξει ότι ένας ομοιομορφισμός του κύκλου χωρίς περιοδικά σημεία είναι συνδυαστικά ισοδύναμος με μια περιστροφή του κύκλου. Ο Parry [35] απέδειξε ένα ανάλογο αποτέλεσμα για συνεχείς κατά τμήματα μονότονες απεικονίσεις του μοναδιαίου διαστήματος. Ακόμη, οι Metropolis, Stein & Stein [32] καθώς και οι Milnor & Thurston [33] μελέτησαν, με αυτές τις εργασίες τους, πότε είναι τοπολογικά ισοδύναμα δύο δυναμικά συστήματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζουμε τις τοπολογικές ισοδυναμίες των κατά τμήματα μονότονων απεικονίσεων [16]. Θεωρούμε την οικογένεια των συναρτήσεων οι οποίες είναι κατά τμήματα C^1 και μονότονες, επεκτατικές ($|f'| > 1$) και απεικονίζουν κάθε ένα διάστημα στο οποίο η f είναι μονότονη επί μιας ένωσης τέτοιων διαστημάτων. Το κύριο αποτέλεσμα είναι ότι κάθε απεικόνιση αυτής της κλάσης είναι τοπολογικά ισοδύναμη με μια απεικόνιση της ίδιας κλάσης η οποία είναι επιπλέον κατά τμήματα γραμμική. Αρχικά, μελετούμε την περίπτωση που το πλήθος των διαστημάτων

μονοτονίας είναι πεπερασμένο και στη συνέχεια επεκτείνουμε τα αποτελέσματα στην περίπτωση που το πλήθος αυτό είναι αριθμήσιμο. Τέλος, μια εφαρμογή του κύριου αποτελέσματος είναι ο υπολογισμός της τοπολογικής εντροπίας μιας απεικόνισης της οικογένειας που μελετάμε στην περίπτωση της πεπερασμένης διαμέρισης. Ο υπολογισμός αυτός στηρίζεται στο Θεώρημα των Misiurewicz-Szlenk. Όπως αποδεικνύουμε στο ίδιο κεφάλαιο το θεώρημα αυτό δεν μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση των απεικονίσεων με αριθμήσιμη διαμέριση.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε την δυναμική μιας οικογένειας απεικονίσεων $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ που ορίζονται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x + a, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ \lambda_2 x + b, & \text{αν } x > 0 \end{cases} .$$

Οι απεικονίσεις αυτές είναι κατά τμήματα γραμμικές με μια ασυνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$. Αποδεικνύουμε [8] ότι για μια απεικόνιση από την παραπάνω οικογένεια ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

- (α) Υπάρχουν το πολύ δύο περιοδικές τροχιές οι οποίες έλκουν όλα τα υπόλοιπα σημεία.
- (β) Όλα σχεδόν τα σημεία του $[-1, 1]$ είναι περιοδικά ή τελικώς περιοδικά.
- (γ) Η απεικόνιση f είναι τελικώς επεκτατική. Σε αυτή την περίπτωση για την απεικόνιση f υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

Στο ίδιο κεφάλαιο βρίσκουμε συνθήκες στις παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, a, b$ οι

οποίες χαρακτηρίζουν συγκεκριμένη δυναμική των απεικονίσεων αυτής της οικογένειας.

Κεφάλαιο 2

Βασικοί ορισμοί και βοηθητικές προτάσεις

2.1 Τοπολογική δυναμική

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα κλειστό διάστημα, που συνήθως θεωρούμε ότι είναι το $[0, 1]$ ή το $[-1, 1]$ και $f : I \rightarrow I$ μια συνάρτηση. Επειδή $f(I) \subset I$ είναι φανερό ότι έχουν νόημα οι συνθέσεις $f \circ f, f \circ f \circ f, \dots$, οι οποίες συμβολίζονται με f^2, f^3, \dots αντίστοιχα. Αν $x \in I$, τότε το σύνολο $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται **τροχιά** του σημείου x (θεωρούμε ότι $f^0(x) = x$ και $f^1(x) = f(x)$). Το σύνολο $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ λέγεται **τροχιά μήκους n** . Η μελέτη της τροχιάς των σημείων του I , και ιδιαίτερα η συμπεριφορά της τροχιάς για n πολύ μεγάλο, είναι το αντικείμενο της Δυναμικής.

Σε ορισμένες περιπτώσεις η τροχιά ενός σημείου είναι πολύ απλή. Ένα σημείο $x \in I$ λέγεται **περιοδικό** περιόδου n αν $f^n(x) = x$ και $f^m(x) \neq x$,

για $m = 1, 2, \dots, n - 1$. Ένα μη περιοδικό σημείο $x \in I$ λέγεται **τελικώς περιοδικό**, αν υπάρχει φυσικός αριθμός $k \geq 1$, τέτοιος ώστε το σημείο $f^k(x)$ είναι περιοδικό. Η τροχιά $O(p)$ λέγεται **περιοδική** αν το σημείο p είναι περιοδικό. Στην ειδική περίπτωση που $n = 1$ το περιοδικό σημείο x λέγεται **σταθερό** σημείο της f . Τα περιοδικά σημεία παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη μελέτη της δυναμικής μιας απεικόνισης όχι μόνο γιατί η τροχιά τους είναι πολύ απλή, αλλά γιατί συχνά αποτελούν πόλο έλξης για τα γειτονικά σε αυτά σημεία και έτσι καθορίζουν την τροχιά τους. **ω-οριακό** σύνολο του x , που συμβολίζεται $\omega(x)$, είναι το σύνολο των οριακών σημείων της τροχιάς $O(x)$. Το $\omega(x)$ είναι μη κενό, γιατί το I είναι συμπαγές. Ένα περιοδικό σημείο p λέγεται **ελκτικό** ή **περιοδικός ελκυστής** αν το σύνολο $B(p) = \{x \in I : \omega(x) = O(p)\}$ περιέχει κάποιο διάστημα. Το σύνολο $B(p)$ λέγεται **λεκάνη έλξης** του p . **Μη περιπλανώμενο** σύνολο για την $f : I \rightarrow I$, που συμβολίζεται $\Omega(f)$, είναι το σύνολο των σημείων $x \in I$ για τα οποία, για κάθε γειτονική περιοχή U του x , υπάρχουν $n \geq 1$ και $y \in U$ με $f^n(y) \in U$. Το $\Omega(f)$ είναι συμπαγές [39] και προφανώς περιέχει όλα τα περιοδικά σημεία της f .

Ένα κεντρικό ερώτημα στη θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων είναι πότε δύο απεικονίσεις θεωρούνται ότι έχουν παρόμοια δυναμική συμπεριφορά. Δύο απεικονίσεις $f, g : I \rightarrow I$ λέγονται **τοπολογικά ισοδύναμες** αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : I \rightarrow I$ τέτοιος ώστε $h \circ f = g \circ h$, δηλαδή, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & I \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ I & \xrightarrow{g} & I \end{array}$$

αντιμετατίθεται. Σ' αυτή την περίπτωση η h απεικονίζει τα σημεία της τρο-

χιάς $O_f(x)$ στα σημεία της τροχιάς $O_g(h(x))$, γιατί $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$.

Στη συνέχεια θα κάνουμε συχνή χρήση του παρακάτω Λήμματος. Η απόδειξή του μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο [2], ή στο βιβλίο [13].

Λήμμα 2.1.1 Έστω $f : I \rightarrow I$ μια C^1 συνάρτηση και $J \subset I$ ένα κλειστό διάστημα.

- (α) Αν $f(J) \subset J$ και $|f'(x)| < 1$, για κάθε $x \in J$, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $p \in J$ τέτοιο ώστε $f(p) = p$ και $f^n(x) \rightarrow p$, καθώς $n \rightarrow \infty$, για κάθε $x \in J$.
- (β) Έστω $f^n(J) \subset J$, για $n > 1$ και $J \cap f^m(J) = \emptyset$, για $m = 1, 2, \dots, n-1$. Αν $|(f^n)'(x)| < 1$, για κάθε $x \in J$, τότε υπάρχει μοναδικό $p \in J$ το οποίο είναι ελκτικό περιοδικό σημείο, περιόδου n , με $J \subset B(p)$.

Τοπολογική εντροπία

Η τοπολογική εντροπία είναι ένα μέτρο της πολυπλοκότητας μιας απεικόνισης και είναι τοπολογικά αναλλοίωτη, δηλαδή, δύο απεικονίσεις τοπολογικά ισοδύναμες έχουν την ίδια τοπολογική εντροπία. Αυτή η έννοια πρωτοεμφανίστηκε το 1965 στην εργασία των Adler, Konheim και McAndrew [1]. Αργότερα, ο Dinaburg [14] το 1970 και ο Bowen [9] το 1971 έδωσαν ένα διαφορετικό ορισμό ισοδύναμο με τον πρώτο. Στην παρουσίαση που ακολουθεί υιοθετούμε τον ορισμό του Bowen.

Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε την αύξουσα ακολουθία μετρικών d_n ως εξής:

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \text{ όπου } x, y \in X.$$

Παρατηρούμε ότι $d_1 = d$ και ότι οι μετρικές d_n για $n > 1$ εξαρτώνται από τη συνάρτηση f . Με $B(x, \varepsilon, n)$ συμβολίζουμε την ανοιχτή σφαίρα με κέντρο x και ακτίνα ε ως προς τη μετρική d_n , δηλαδή, $B(x, \varepsilon, n) = \{y \in X : d_n(x, y) < \varepsilon\}$.

Ένα πεπερασμένο σύνολο $E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset X$ ονομάζεται (n, ε) -εκτεινόμενο αν $\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon, n) = X$. Με $r(f, \varepsilon, n)$ συμβολίζουμε το μικρότερο πληθάρημο που μπορεί να έχει ένα (n, ε) -εκτεινόμενο σύνολο. Έτσι αν το σύνολο K είναι (n, ε) -εκτεινόμενο, τότε $\text{card}(K) \geq r(f, \varepsilon, n)$, όπου $\text{card}(K)$ είναι ο πληθάρημος του συνόλου K . Μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός $r(f, \varepsilon, n)$ παριστάνει το μικρότερο αριθμό αρχικών σημείων των οποίων η τροχιά μέχρι τη χρονική στιγμή n προσεγγίζει την τροχιά οποιουδήποτε αρχικού σημείου με ακρίβεια ε .

Ένα πεπερασμένο σύνολο $E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset X$ ονομάζεται (n, ε) -διαχωρισμένο αν $d_n(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, k$ με $i \neq j$. Συμβολίζουμε με $s(f, \varepsilon, n)$ το μεγαλύτερο πληθάρημο που μπορεί να έχει ένα (n, ε) -διαχωρισμένο σύνολο. Αν το K είναι (n, ε) -διαχωρισμένο, τότε $\text{card}(K) \leq s(f, \varepsilon, n)$. Μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός $s(f, \varepsilon, n)$ παριστάνει το μέγιστο αριθμό των διαφορετικών τροχιών μήκους n αν συγκριθούν με ακρίβεια ε .

Έστω

$$r(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln r(f, \varepsilon, n)$$

$$s(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln s(f, \varepsilon, n)$$

Οι αποδείξεις των προτάσεων που βρίσκονται σ' αυτή την υποενότητα μπορούν να βρεθούν στο [21]. Από το παρακάτω Λήμμα και το πόρισμα που

ακολουθεί προκύπτει ότι οι αριθμοί $r(f, \varepsilon, n)$ και $s(f, \varepsilon, n)$ καθώς και οι $r(f, \varepsilon)$ και $s(f, \varepsilon)$ έχουν μεγάλη σχέση μεταξύ τους.

Λήμμα 2.1.2

(α) Αν $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, τότε $r(f, \varepsilon_1, n) \geq r(f, \varepsilon_2, n)$ και $s(f, \varepsilon_1, n) \geq s(f, \varepsilon_2, n)$.

(β) $r(f, \varepsilon, n) \leq s(f, \varepsilon, n) \leq r(f, \frac{1}{2}\varepsilon, n)$.

Πόρισμα 2.1.3

(α) Αν $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, τότε $r(f, \varepsilon_1) \geq r(f, \varepsilon_2)$ και $s(f, \varepsilon_1) \geq s(f, \varepsilon_2)$.

(β) $r(f, \varepsilon) \leq s(f, \varepsilon) \leq r(f, \frac{1}{2}\varepsilon)$.

Από το παραπάνω Πόρισμα προκύπτει ότι υπάρχουν τα όρια των $r(f, \varepsilon)$ και $s(f, \varepsilon)$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ και είναι ίσα. Έτσι έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.1.4 Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Η **τοπολογική εντροπία** της f ως προς τη μετρική d είναι ο αριθμός

$$h_d(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(f, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(f, \varepsilon).$$

Αν προσπαθήσουμε να περιγράψουμε λεκτικά την ισότητα $h_d(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(f, \varepsilon)$ μπορούμε να πούμε ότι η τοπολογική εντροπία αναπαριστά τον εκθετικό ρυθμό αύξησης του πλήθους των διαφορετικών τροχιών μήκους n καθώς το n τείνει στο ∞ , όπου ο διαχωρισμός των διαφορετικών τροχιών γίνεται με οσοδήποτε μικρή ακρίβεια ε . Έτσι το πλήθος των διαφορετικών τροχιών μήκους n με ακρίβεια ε είναι της τάξης του $e^{nh_d(f)}$.

Πρόταση 2.1.5 Αν (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συνεχής απεικόνιση, τότε $h_d(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{s}(f, \varepsilon)$, όπου $\underline{s}(f, \varepsilon) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln s(f, \varepsilon, n)$.

Σύμφωνα με την επόμενη Πρόταση μια σημαντική ιδιότητα της τοπολογικής εντροπίας είναι ότι είναι τοπολογικά αναλλοίωτη.

Πρόταση 2.1.6 Έστω (X, d) και (Y, \tilde{d}) συμπαγείς μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow X$ και $g : Y \rightarrow Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $h : X \rightarrow Y$ τέτοιος ώστε $h \circ f = g \circ h$. Τότε $h_d(f) = h_{\tilde{d}}(g)$.

Πόρισμα 2.1.7 Αν οι χώροι (X, d) και (X, \tilde{d}) είναι ισοδύναμοι (ως προς τις μετρικές d και \tilde{d}) συμπαγείς μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow X$ συνεχής συνάρτηση, τότε $h_d(f) = h_{\tilde{d}}(f)$.

Από το παραπάνω πόρισμα γίνεται φανερό ότι η τοπολογική εντροπία δεν εξαρτάται από την μετρική του χώρου αλλά μόνο από την τοπολογία του. Έτσι αντί του $h_d(f)$ θα γράφουμε απλά $h(f)$.

Το θεώρημα Misiurewicz-Szlenk

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στην περίπτωση που ο χώρος X είναι το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και η απεικόνιση f είναι κατά τμήματα μονότονη.

Κλάδος της f ονομάζεται κάθε διάστημα $J \subset [0, 1]$ που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- (α) η f είναι μονότονη στο J ,
- (β) αν $I \supsetneq J$, τότε η f δεν είναι μονότονη στο I .

Συμβολίζουμε με $c(f)$ το πλήθος των κλάδων της f . Στην εργασία των Misiurewicz-Szlenk [34] υπάρχει ένα σημαντικό θεώρημα που συνδέει την

τοπολογική εντροπία $h(f)$ της συνάρτησης f με το πλήθος των κλάδων των επαναλήψεων f^n καθώς και με την μεταβολή $\text{Var}(f^n)$ των επαναλήψεων f^n .

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ μια συνάρτηση. Η **μεταβολή** της f συμβολίζεται με $\text{Var}(f)$ και ισούται με το $\sup\{\sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})|\}$, όπου το supremum είναι πάνω σε όλες τις διαμερίσεις $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ του $[0, 1]$. Αν $\text{Var}(f) < \infty$, τότε η συνάρτηση f λέγεται **φραγμένης μεταβολής**.

Θεώρημα 2.1.8 (Misiurewicz-Szlenk) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ μια συνεχής, κατά τμήματα μονότονη απεικόνιση. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln c(f^n) = h(f)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \text{Var}(f^n) = h(f). \quad (2.1)$$

Από την (2.1) παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.1.9 Αν η απεικόνιση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ είναι συνεχής και κατά τμήματα γραμμική με σταθερή κατά απόλυτη τιμή κλίση s , τότε $h(f) = \ln s$.

2.2 Μετρήσιμη δυναμική

Αν για την απεικόνιση $f : I \rightarrow I$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, υπάρχει ένας περιοδικός ελκυστής p , τότε η τροχιά κάθε σημείου x_0 που βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του p τείνει στην τροχιά του p . Σε ορισμένες συναρτήσεις η

τροχιά κάποιου σημείου p , που δεν είναι περιοδικό, έλκει τις τροχιές άλλων σημείων. Τέτοιες τροχιές λέγονται συχνά **χαοτικοί ελκυστές**. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, επειδή το πλήθος των σημείων του ελκυστή δεν είναι πεπερασμένο, γίνεται στατιστική περιγραφή του ελκυστή και χρησιμοποιούνται μέθοδοι της θεωρίας μέτρου.

Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ μια συνάρτηση και μ ένα μέτρο πάνω στο διάστημα $[-1, 1]$. Το μέτρο μ λέγεται **αναλλοίωτο** για την f αν $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subset [-1, 1]$.

Η σπουδαιότητα της έννοιας του αναλλοίωτου μέτρου για τα δυναμικά συστήματα προκύπτει από το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff. Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στις εργασίες [10, 26, 36].

Στο Θεώρημα που ακολουθεί, συμβολίζουμε με $L^1(\mu)$, τον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ως προς το μέτρο μ .

Θεώρημα 2.2.1 (Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff) Υποθέτουμε ότι $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ είναι μια απεικόνιση, μ ένα αναλλοίωτο μέτρο για την f και $g \in L^1(\mu)$. Τότε, υπάρχει απεικόνιση $g^* \in L^1(\mu)$, τέτοια ώστε

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ f^k \rightarrow g^*, \quad \mu - \text{σχεδόν παντού.}$$

Επιπλέον, $g^* \circ f = g^*$, $\mu - \text{σχεδόν παντού}$, και αν το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, τότε $\int_{-1}^1 g^* d\mu = \int_{-1}^1 g d\mu$.

Το μέτρο μ λέγεται **εργοδικό** για την f αν είναι αναλλοίωτο και $\mu(A) = 0$ ή $\mu(A^c) = 0$, για κάθε μετρήσιμο σύνολο A για το οποίο ισχύει $f^{-1}(A) = A$. Έστω μ ένα εργοδικό μέτρο πιθανότητας δηλαδή, $\mu([-1, 1]) = 1$. Αν για την απεικόνιση $g^* \in L^1(\mu)$ ισχύει $g^* \circ f = g^*$, τότε η g^* είναι σταθερή $\mu - \text{σχεδόν παντού}$ [39]. Σ' αυτή την περίπτωση

έχουμε ότι ο χρονικός μέσος όρος και ο χωρικός μέσος όρος είναι ίσοι μ -σχεδόν παντού. Δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ f^k = \int_{-1}^1 g d\mu \quad (2.2)$$

Ένα μέτρο μ λέγεται **απολύτως συνεχές** ως προς το μέτρο Lebesgue λ αν $\mu(A) = 0$, για κάθε μετρήσιμο σύνολο A για το οποίο $\lambda(A) = 0$. Αν μια συνάρτηση f έχει ένα εργοδικό αναλλοίωτο μέτρο το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε η (2.2) ισχύει για κάθε σημείο $x \in [-1, 1]$ εκτός από ένα σύνολο σημείων που έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

Το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff περιγράφει τη σπουδαιότητα ενός αναλλοίωτου μέτρου χωρίς να αναφέρεται στην ύπαρξη τέτοιων μέτρων. Ένα θεώρημα το οποίο δίνει συνθήκες για την ύπαρξη αναλλοίωτου μέτρου το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue είναι το θεώρημα των Lasota και Yorke. Το 1973 οι Lasota & Yorke [23] απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.2 Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ είναι μια C^2 συνάρτηση έκτος ίσως από τα σημεία $-1 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$ για την οποία ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i) υπάρχει σταθερά $\lambda > 1$ τέτοια ώστε $|f'(x)| \geq \lambda$ για κάθε $x \in \bigcup_{i=1}^r (a_{i-1}, a_i)$,
- ii) υπάρχει σταθερά $c < \infty$ τέτοια ώστε $\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|^2} \leq c$ για κάθε $x \in \bigcup_{i=1}^r (a_{i-1}, a_i)$.

Τότε η f έχει ένα αναλλοίωτο μέτρο απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

Μια απεικόνιση που πληρεί την συνθήκη (i) του παραπάνω θεωρήματος λέγεται **κατά τμήματα επεκτατική**, ή απλά **επεκτατική**. Η απεικόνιση f λέγεται **τελικώς επεκτατική** αν η f^k είναι επεκτατική, για κάποιο φυσικό αριθμό $k > 1$.

Κεφάλαιο 3

Τοπολογική ισοδυναμία

3.1 Τοπολογική ισοδυναμία κατά τμήματα μονότονων απεικονίσεων

Θεωρούμε την οικογένεια απεικονίσεων \mathcal{M} οι οποίες είναι κατά τμήματα μονότονες, επεκτατικές και ικανοποιούν μια συνθήκη Markov. Πιο συγκεκριμένα μια απεικόνιση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ανήκει στην οικογένεια \mathcal{M} αν υπάρχει διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = 1$ ($r \geq 2$) του $[0, 1]$ τέτοια ώστε

- (α) ο περιορισμός $f|_{(a_{i-1}, a_i)}$ είναι μονότονη C^1 απεικόνιση ($i = 1, 2, \dots, r$),
- (β) για κάθε $i = 1, 2, \dots, r$ υπάρχουν $p(i), q(i) \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ με $p(i) < q(i)$ τέτοια ώστε $f(a_{i-1}, a_i) = (a_{p(i)}, a_{q(i)})$, (συνθήκη **Markov**)
- (γ) υπάρχει $\lambda > 1$ τέτοιος ώστε $|f'(x)| \geq \lambda$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

Για τις τιμές της f στα σημεία της διαμέρισης υποθέτουμε ότι ισχύει

$$f(a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) \quad \text{ή} \quad f(a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x).$$

Ακόμη, η παράγωγος της συνάρτησης στα σημεία αυτά παίρνει δύο τιμές

$$f'(a_i^-) = \lim_{x \rightarrow a_i^-} f'(x) \quad \text{και} \quad f'(a_i^+) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f'(x) \quad (\text{Σχήμα 3.1}).$$

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις τοπολογικές ισοδυναμίες των απεικονίσεων $f \in \mathcal{M}$. Αν $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = 1$ είναι η διαμέριση που αντιστοιχεί στην f , λέμε ότι η f είναι **τάξης r** . Τα σημεία της διαμέρισης ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** της f . Συμβολίζουμε με I_1, \dots, I_r τα διαστήματα της διαμέρισης, δηλαδή, $I_j = (a_{j-1}, a_j)$. Υποθέτουμε ότι αυτά τα διαστήματα έχουν την παρακάτω ιδιότητα: αν I είναι ένα διάστημα που περιέχει γνησίως ένα από τα I_1, \dots, I_r , τότε ο περιορισμός της f στο I δεν είναι συνεχής ή μονότονη απεικόνιση.

Συμβολίζουμε με f_j τον περιορισμό της f στο I_j . Ακόμη, συμβολίζουμε με $F_{j_0 j_1 \dots j_k}$ τη σύνθεση $f_{j_0}^{-1} \circ f_{j_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{j_k}^{-1}$, όπου τα j_0, j_1, \dots, j_k ανήκουν στο $\{1, 2, \dots, r\}$. Παρατηρούμε ότι η $F_{j_0 j_1 \dots j_k}$ δεν ορίζεται κατ' ανάγκη για κάθε (πεπερασμένη) ακολουθία $j_0 j_1 \dots j_k$. Πιο συγκεκριμένα, η $F_{j_0 j_1 \dots j_k}$ ορίζεται μόνο αν $I_{j_m} \subset f(I_{j_{m-1}})$, για κάθε $m = 1, 2, \dots, k$. Σ' αυτή την περίπτωση η ακολουθία $j_0 j_1 \dots j_k$ λέγεται **επιτρεπτή** για την f . Ακόμη, παρατηρούμε ότι το $F_{j_0 j_1 \dots j_k}(x)$ είναι το μοναδικό σημείο $y \in I_{j_0}$ τέτοιο ώστε $f(y) \in I_{j_1}, \dots, f^k(y) \in I_{j_k}$ και $f^{k+1}(y) = x$. Δηλαδή, η τροχιά του y επισκέπτεται διαδοχικά τα διαστήματα I_{j_0}, \dots, I_{j_k} και $y = F_{j_0 j_1 \dots j_k}(f^{k+1}(y))$.

Ορίζουμε το σύνολο των σημείων που τελικά απεικονίζονται σε κάποιο κρίσιμο σημείο

$$\mathcal{C}(f) = \bigcup_{j=0}^r \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(a_j).$$

Συνήθως, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα γράφουμε απλά \mathcal{C} αντί του $\mathcal{C}(f)$.

Στη συνέχεια, θα εισάγουμε ορισμένες έννοιες της συμβολικής δυναμικής. Σε κάθε σημείο x του \mathcal{C} , αντιστοιχούμε μια ακολουθία συμβόλων που σχετίζεται με την διάταξη των σημείων της τροχιάς $O(x)$.

Ορισμός 3.1.1 Η πορεία του $x \in \mathcal{C}$ ως προς την $f \in \mathcal{M}$ είναι η ακολουθία $\underline{i}_f(x) = \{i_n(x)\}_{n=0}^\infty$, όπου

$$i_n(x) = \begin{cases} j, & \text{αν } f^n(x) \in I_j, \\ \frac{2j+1}{2}, & \text{αν } f^n(x) = a_j. \end{cases}$$

Έχουμε έτσι την απεικόνιση $\underline{i}_f : \mathcal{C} \rightarrow \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, r, \frac{2r+1}{2}\}^{\mathbb{N}}$. Για την περιγραφή του συνόλου $\underline{i}_f(\mathcal{C})$ θα χρησιμοποιήσουμε την **απεικόνιση μετατόπισης** σ που ορίζεται ως εξής: αν $\underline{x} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$, τότε $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, όπου $\underline{y} = \{y_n\}_{n=1}^\infty$. Επαγωγικά, έχουμε $\sigma^k(\underline{x}) = \{x_n\}_{n=k}^\infty$. Σε κάθε απεικόνιση $f \in \mathcal{M}$ τάξης r , αντιστοιχούμε ένα σύνολο ακολουθιών $\Sigma(f)$ το οποίο είναι υποσύνολο του $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, r, \frac{2r+1}{2}\}^{\mathbb{N}}$. Περιγράφουμε αυτό το σύνολο στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.1.2 Έστω $f \in \mathcal{M}$ με διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = 1$. Ορίζουμε το σύνολο των ακολουθιών $\Sigma(f) = \{\underline{a} : \underline{a} = \{x_n\}_{n=0}^\infty\}$ με στοιχεία από το σύνολο $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, r, \frac{2r+1}{2}\}$, που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

- (a) Έστω $\underline{a} = \{x_n\}_{n=0}^\infty \in \Sigma(f)$. Τότε υπάρχει ένα στοιχείο x_n της ακολουθίας \underline{a} της μορφής $\frac{2k+1}{2}$, όπου $k = 0, 1, \dots, r$. Επιπλέον, αν x_N είναι το πρώτο στοιχείο της \underline{a} με αυτή την ιδιότητα, τότε $\sigma^N(\underline{a}) = \underline{i}_f(a_k)$.

(β) Αν $0 \leq n < N - 1$ και $x_n = j$, τότε $p(j) + 1 \leq x_{n+1} \leq q(j)$.

Προφανώς η συνθήκη (β) του παραπάνω ορισμού έχει νόημα μόνο αν $N > 1$. Από αυτή την συνθήκη προκύπτει ότι η ακολουθία $x_0 x_1 \dots x_{N-1}$ είναι επιτρεπτή.

Λήμμα 3.1.3 Έστω $f \in \mathcal{M}$ μια απεικόνιση τάξης r . Τότε $\underline{i}_f(\mathcal{C}) = \Sigma(f)$.

Απόδειξη. Έστω $\underline{a} \in \underline{i}_f(\mathcal{C})$, τότε υπάρχει $x \in \mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $\underline{i}_f(x) = \underline{a}$. Αφού $x \in \mathcal{C}$ θα υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $k = 0, 1, \dots, r$, τέτοια ώστε $f^N(x) = a_k$ και το $f^n(x)$ δεν είναι κρίσιμο σημείο για $n < N$. Τότε $\sigma^N(\underline{a}) = \underline{i}_f(a_k)$. Έστω τώρα $N > 1$ και $n < N - 1$, τότε επειδή το $f^n(x)$ δεν είναι κρίσιμο σημείο υπάρχει j τέτοιος ώστε $f^n(x) \in I_j$. Ακόμη, από τον ορισμό των συναρτήσεων $f \in \mathcal{M}$, έχουμε $f^{n+1}(x) \in I_{p(j)+1} \cup \dots \cup I_{q(j)}$. Άρα, $\underline{a} \in \Sigma(f)$.

Έστω τώρα $\underline{a} = \{x_n\} \in \Sigma(f)$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in \mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $\underline{i}_f(x) = \underline{a}$. Από τον Ορισμό 3.1.2, ένα στοιχείο της ακολουθίας \underline{a} είναι της μορφής $\frac{2k+1}{2}$. Έστω x_n το πρώτο στοιχείο μ' αυτή την ιδιότητα. Τότε το σημείο $x = F_{x_0 x_1 \dots x_{n-1}}(a_k)$ είναι το ζητούμενο. \square

Μπορούμε να ορίσουμε μια διάταξη στο σύνολο $\underline{i}_f(\mathcal{C})$ η οποία είναι συνεπής με τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Δύο ακολουθίες συμβόλων $\underline{x} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ και $\underline{y} = \{y_n\}_{n=0}^\infty$ που ανήκουν στο $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, r, \frac{2r+1}{2}\}^\mathbb{N}$ λέμε ότι έχουν **ασυμφωνία** τάξης n αν $x_i = y_i$, για κάθε $i = 0, 1, \dots, n - 1$, και $x_n \neq y_n$.

Έστω x, y δύο σημεία του \mathcal{C} . Αν οι πορείες τους έχουν ασυμφωνία τάξης n , τα πρώτα n σημεία των τροχιών τους επισκέπτονται ταυτόχρονα τα ίδια διαστήματα I_j της διαμέρισης. Πιο συγκεκριμένα, αν $i_k(x) = i_k(y) = j_k$, για κάθε $k = 0, 1, \dots, n - 1$, και $i_n(x) \neq i_n(y)$

θα δείξουμε ότι τα στοιχεία j_0, j_1, \dots, j_{n-1} δεν είναι της μορφής $\frac{2s+1}{2}$. Πράγματι, αν υποθέσουμε το αντίθετο έχουμε $\underline{i}_f(x) = \underline{i}_f(y)$, που είναι άτοπο, γιατί $i_n(x) \neq i_n(y)$. Από τον Ορισμό 3.1.1, τα x, y ανήκουν στο I_{j_0} και διαδοχικά επισκέπτονται τα διαστήματα $I_{j_1}, \dots, I_{j_{n-1}}$. Τα διαστήματα $I_{j_0}, I_{j_1}, \dots, I_{j_{n-1}}$ τα καλούμε **κοινά διαστήματα** των x, y . Ακόμη, μπορούμε να γράψουμε $x = F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}(f^n(x))$ και $y = F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}(f^n(y))$.

Με τον επόμενο ορισμό εισάγουμε μια σχέση διάταξης στο σύνολο των ακολουθιών $\underline{i}_f(\mathcal{C})$.

Ορισμός 3.1.4 Έστω $f \in \mathcal{M}$ και $x, y \in \mathcal{C}$ με $x \neq y$. Υποθέτουμε ότι οι πορείες $\underline{i}_f(x)$ και $\underline{i}_f(y)$ έχουν ασυμφωνία τάξης n και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε k από τα κοινά διαστήματα των x, y .

(α) Αν ο k είναι άρτιος, τότε $\underline{i}_f(x) \prec \underline{i}_f(y)$ αν και μόνο αν $i_n(x) < i_n(y)$.

(β) Αν ο k είναι περιττός, τότε $\underline{i}_f(x) \prec \underline{i}_f(y)$ αν και μόνο αν $i_n(x) > i_n(y)$.

Λήμμα 3.1.5 Έστω $f \in \mathcal{M}$ μια απεικόνιση τάξης r και έστω $x, y \in \mathcal{C}$ με $x \neq y$. Τότε $\underline{i}_f(x) \prec \underline{i}_f(y)$ αν και μόνο αν $x < y$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι πορείες $\underline{i}_f(x)$ και $\underline{i}_f(y)$ έχουν ασυμφωνία τάξης n . Δηλαδή, $i_k(x) = i_k(y) = j_k$, για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$, και $i_n(x) \neq i_n(y)$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε k από τα κοινά διαστήματα $I_{j_0}, I_{j_1}, \dots, I_{j_{n-1}}$ των x, y . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $k = \text{άρτιος}$, τότε η απεικόνιση $F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}$ είναι γνησίως αύξουσα. Υποθέτουμε ότι $\underline{i}_f(x) \prec \underline{i}_f(y)$, τότε από τον Ορισμό 3.1.4 έχου-

με $i_n(x) < i_n(y)$. Αυτό σημαίνει ότι $f^n(x) < f^n(y)$ και, έτσι, $x = F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}(f^n(x)) < y = F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}(f^n(y))$.

(β) Αν $k =$ περιττός, τότε η απεικόνιση $F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Υποθέτουμε ότι $\underline{i}_f(x) < \underline{i}_f(y)$, τότε από τον Ορισμό 3.1.4 έχουμε $i_n(y) < i_n(x)$. Αυτό σημαίνει ότι $f^n(x) > f^n(y)$ και, έτσι, $x = F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}(f^n(x)) < y = F_{j_0 j_1 \dots j_{n-1}}(f^n(y))$. \square

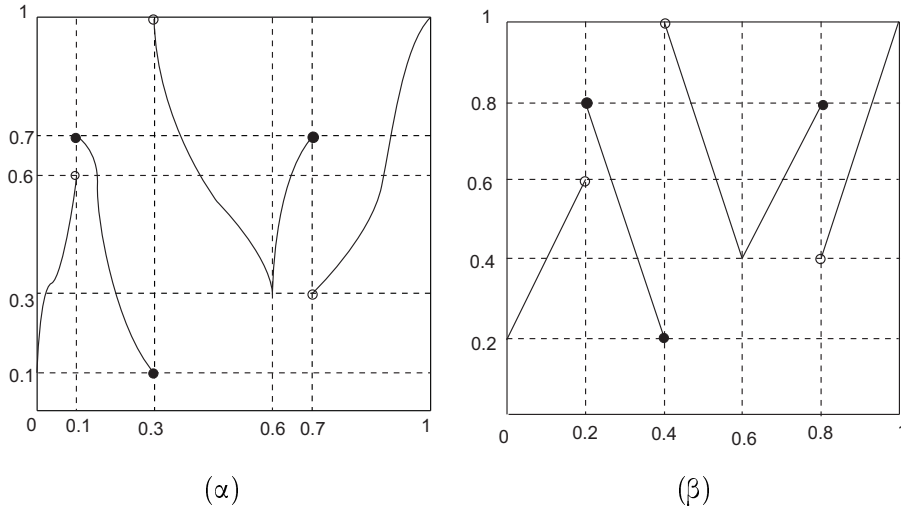
Λήμμα 3.1.6 Έστω $f \in \mathcal{M}$ μια απεικόνιση τάξης r . Η απεικόνιση $\underline{i}_f : \mathcal{C} \rightarrow \Sigma(f)$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathcal{C}$ με $\underline{i}_f(x) = \underline{i}_f(y)$. Έστω ακόμη, k, m οι μικρότεροι ακέραιοι για τους οποίους τα $f^k(x), f^m(y)$ είναι κρίσιμα σημεία της f . Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $k = m$. Υποθέτουμε αντίθετα ότι $k \neq m$ (έστω $k < m$). Αφού το $f^k(x)$ είναι ένα κρίσιμο σημείο, έχουμε $i_k(x) \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2r+1}{2}\}$. Όμως, έχουμε επίσης ότι $i_k(y) \in \{1, 2, \dots, r\}$, που είναι άτοπο, γιατί, $i_k(x) = i_k(y)$. Άρα, $k = m$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $f^k(x) = f^k(y) = a_j$, γιατί $i_k(x) = i_k(y)$ και είναι της μορφής $\frac{2j+1}{2}$.

Υποθέτουμε ότι $i_n(x) = i_n(y) = j_n \in \{1, 2, \dots, r\}$, για κάθε $n = 0, 1, \dots, k-1$. Από τον Ορισμό 3.1.1, τα σημεία x, y ανήκουν στο διάστημα I_{j_0} και διαδοχικά επισκέπτονται τα διαστήματα $I_{j_1}, \dots, I_{j_{k-1}}$. Άρα, έχουμε $x = F_{j_0 j_1 \dots j_{k-1}}(f^k(x))$ και $y = F_{j_0 j_1 \dots j_{k-1}}(f^k(y))$. Όμως, επειδή $f^k(x) = f^k(y)$, παίρνουμε τελικά $x = y$. Έτσι, αποδείξαμε ότι η απεικόνιση \underline{i}_f είναι αμφιμονοσήμαντη. \square

Λήμμα 3.1.7 Έστω $f \in \mathcal{M}$ μια απεικόνιση τάξης r . Τότε το σύνολο \mathcal{C} είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{J} \subset [0, 1]$ ένα ανοιχτό διάστημα τέτοιο ώστε $\tilde{J} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $f^n(\tilde{J}) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε



Σχήμα 3.1: Οι γραφικές παραστάσεις δύο τοπολογικά ισοδύναμων απεικονίσεων

αντίθετα ότι υπάρχει $x \in f^n(\tilde{J}) \cap \mathcal{C}$, τότε υπάρχει $y \in \tilde{J}$ τέτοιο ώστε $x = f^n(y)$. Όμως, $f^m(x) = a_k$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και $k = 0, 1, 2, \dots, r$, γιατί $x \in \mathcal{C}$. Άρα $f^{m+n}(y) = f^m(f^n(y)) = f^m(x) = a_k$, δηλαδή, $y \in \mathcal{C}$, που είναι άτοπο γιατί $\tilde{J} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Έτσι έχουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και C^1 σε καθένα από τα διαστήματα $\tilde{J}, f(\tilde{J}), f^2(\tilde{J}), \dots$, γιατί κανένα από αυτά τα διαστήματα δεν περιέχει κρίσιμο σημείο.

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $|f^n(\tilde{J})| \geq \lambda^n |\tilde{J}|$, για κάθε $n \geq 1$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο \tilde{J} , έχουμε $\frac{|f(\tilde{J})|}{|\tilde{J}|} = |f'(a)|$, για κάποιο $a \in \tilde{J}$. Όμως, $|f'(a)| \geq \lambda$ και, έτσι $|f(\tilde{J})| \geq \lambda |\tilde{J}|$. Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $k < n$. Από το Θεώρημα

Μέσης Τιμής και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $f^{n-1}(\tilde{J})$, έχουμε με $\frac{|f^n(\tilde{J})|}{|f^{n-1}(\tilde{J})|} = |f'(a_1)| \geq \lambda$, για κάποιο $a_1 \in f^{n-1}(\tilde{J})$. Άρα, $|f^n(\tilde{J})| \geq \lambda|f^{n-1}(\tilde{J})|$. Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε $|f^{n-1}(\tilde{J})| \geq \lambda^{n-1}|\tilde{J}|$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισώσεις παίρνουμε τελικά $|f^n(\tilde{J})| \geq \lambda^n|\tilde{J}|$.

Για κάποια τιμή του n είναι $\lambda^n|\tilde{J}| > 1$ που είναι άτοπο γιατί $|f^n(\tilde{J})| \leq 1$. Άρα το \mathcal{C} είναι πυκνό στο $[0, 1]$. \square

Θεώρημα 3.1.8 Έστω $f \in \mathcal{M}$ μια απεικόνιση τάξης r με διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T \in \mathcal{M}$ με διαμέριση $0 < \frac{1}{r} < \frac{2}{r} < \dots < \frac{r-1}{r} < 1$ η οποία είναι γραμμική σε καθένα από τα διαστήματα $[\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r}]$ και ισχύει $T(\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r}) = (\frac{p(i)}{r}, \frac{q(i)}{r})$. Υποθέτουμε, ακόμη, ότι ο περιορισμός $T|_{[\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r}]}$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τον περιορισμό $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ και η T είναι συνεχής, συνεχής από τα δεξιά ή συνεχής από τα αριστερά στο $\frac{i}{r}$, αν η f είναι συνεχής, συνεχής από τα δεξιά ή συνεχής από τα αριστερά στο a_i , αντίστοιχα. Τότε οι απεικονίσεις f και T είναι τοπολογικά ισοδύναμες. (Σχήμα 3.1)

Απόδειξη. Λαμβάνοντας υπόψη ότι (α) $\underline{i}_f(a_k) = \underline{i}_T(\frac{k}{r})$, (β) η ακολουθία $j_0 j_1 \dots j_n$ είναι επιτρεπτή για την f αν και μόνο αν είναι επιτρεπτή για την T και (γ) τον Ορισμό 3.1.2, έχουμε $\Sigma(f) = \Sigma(T)$. Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $h : \mathcal{C}(f) \rightarrow \mathcal{C}(T)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, αμφιμονοσήμαντη, επί και τέτοια ώστε $h \circ f = T \circ h$. Δηλαδή, το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(f) & \xrightarrow{h} & \mathcal{C}(T) \\ f \downarrow & & \downarrow T \\ \mathcal{C}(f) & \xrightarrow{h} & \mathcal{C}(T) \end{array}$$

αντιμετατίθεται.

Η απεικόνιση αυτή ορίζεται ως εξής: έστω $x \in \mathcal{C}(f)$, ορίζουμε σαν $h(x)$ το μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{C}(T)$, για το οποίο $\underline{i}_f(x) = \underline{i}_T(h(x))$. Ισοδύναμα, $h = \underline{i}_T^{-1} \circ \underline{i}_f$. Από τα Λήμματα 3.1.3 και 3.1.6 οι απεικονίσεις \underline{i}_f και \underline{i}_T είναι αμφιμονοσήμαντες και επί, άρα και η h θα είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Από το Λήμμα 3.1.5, οι \underline{i}_f και \underline{i}_T είναι γνησίως αύξουσες, οπότε το ίδιο ισχύει και για την h .

Έστω $x \in \mathcal{C}(f)$. Θα αποδείξουμε ότι τα $h \circ f(x)$ και $T \circ h(x)$ έχουν τις ίδιες πορείες ως προς T . Πράγματι,

$$\underline{i}_T(h(f(x))) = \underline{i}_f(f(x)) = \sigma(\underline{i}_f(x)).$$

Όμως,

$$\underline{i}_T(T(h(x))) = \sigma(\underline{i}_T(h(x))) = \sigma(\underline{i}_f(x)).$$

Και επειδή η \underline{i}_T είναι αμφιμονοσήμαντη, έχουμε ότι $h \circ f(x) = T \circ h(x)$.

Από το Λήμμα 3.1.7 τα σύνολα $\mathcal{C}(f)$ και $\mathcal{C}(T)$ είναι πυκνά στο $[0,1]$. Έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε την h σε έναν ομοιομορφισμό $\tilde{h} : [0,1] \rightarrow [0,1]$ τέτοιοι ώστε $\tilde{h} \circ f = T \circ \tilde{h}$. \square

3.2 Απεικονίσεις με αριθμήσιμη διαμέριση

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε απεικονίσεις της οικογένειας \mathcal{M} με πεπερασμένη διαμέριση. Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μια οικογένεια απεικονίσεων \mathcal{M}_∞ με αριθμήσιμη διαμέριση.

Ορισμός 3.2.1 Μια απεικόνιση $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ ανήκει στην οικογένεια \mathcal{M}_∞ αν υπάρχει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ με $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ τέτοια ώστε:

- (α) η f είναι C^1 και μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $I_i = (a_{i-1}, a_i)$ της διαμέρισης.
- (β) Για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$, υπάρχουν μοναδικά $p(i), q(i) \in \mathbb{N}$ με $p(i) < q(i)$ τέτοια ώστε $f(a_{i-1}, a_i) = (a_{p(i)}, a_{q(i)})$.
- (γ) Υπάρχει $\lambda > 1$ τέτοιος ώστε $|f'(x)| \geq \lambda$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

Τα σημεία a_0, a_1, \dots της διαμέρισης ονομάζονται **κρίσιμα σημεία**.

Παράδειγμα απεικόνισης $f \in \mathcal{M}_\infty$ αποτελεί η

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2n+2}{n+2}x + \frac{1-n}{n+2}, & \text{αν } x \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \text{ για } n \geq 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}.$$

Για αυτή την απεικόνιση έχουμε $a_n = \frac{n}{n+1}$, $p(i) = i-1$, $q(i) = i+1$, γιατί $f(a_{i-1}, a_i) = (a_{i-1}, a_{i+1})$ και $\lambda = \frac{4}{3}$, γιατί $f'(x) = \frac{2n+2}{n+2} \geq \frac{4}{3}$, για $n \geq 1$.

Το σύνολο των σημείων του $[0, 1]$ που τελικά απεικονίζεται σε κρίσιμο σημείο της f είναι το $\mathcal{C}_\infty(f) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(a_j)$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\underline{i}_f : \mathcal{C}_\infty \rightarrow \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}^{\mathbb{N}}$ που σε κάθε σημείο $x \in \mathcal{C}_\infty$ αντιστοιχεί την ακολουθία $\underline{i}_f(x) = \{i_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, όπου

$$i_n(x) = \begin{cases} j, & \text{αν } f^n(x) \in I_j, \\ \frac{2j+1}{2}, & \text{αν } f^n(x) = a_j. \end{cases}$$

Ορισμός 3.2.2 Έστω $f \in \mathcal{M}_\infty$ με διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < 1$. Ορίζουμε το σύνολο $\Sigma_\infty(f) = \{\underline{a} : \underline{a} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}\}$ των ακολουθιών με στοιχεία από το $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$, ως εξής:

- (α) Έστω $\underline{a} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_\infty(f)$. Τότε υπάρχει ένα στοιχείο x_n της ακολουθίας \underline{a} , της μορφής $\frac{2k+1}{2}$, όπου $k = 0, 1, \dots$. Ακόμη, αν x_N

είναι το πρώτο στοιχείο της \underline{a} με αυτή την ιδιότητα, τότε $\sigma^N(\underline{a}) = \underline{i}_f(a_k)$.

(β) Αν $0 \leq n < N - 1$ και $x_n = j$, τότε $p(j) + 1 \leq x_{n+1} \leq q(j)$.

Η απεικόνιση $\underline{i}_f : \mathcal{C}_\infty(f) \rightarrow \Sigma_\infty(f)$ είναι αμφιμονοσήμαντη, επί και γνησίως αύξουσα. Ακόμη, το σύνολο \mathcal{C}_∞ είναι πυκνό στο $[0, 1]$. Οι αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών είναι όμοιες με τις αποδείξεις των Λημμάτων 3.1.3, 3.1.5, 3.1.6 και 3.1.7. Οι μόνες αλλαγές που πρέπει να γίνουν είναι να αντικατασταθούν οι παραστάσεις $k = 0, 1, 2, \dots, r$, $\{1, 2, \dots, r\}$ και $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2r+1}{2}\}$ με τις παραστάσεις $k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^*$ και $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.2.3 Έστω $f \in \mathcal{M}_\infty$ με διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση $T \in \mathcal{M}_\infty$ με διαμέριση $0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \dots < 1$ η οποία είναι γραμμική σε καθένα από τα διαστήματα $[\frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1}]$ και ισχύει $T(\frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1}) = (\frac{p(i)}{p(i)+1}, \frac{q(i)}{q(i)+1})$. Ακόμη, ο περιορισμός $T|_{[\frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1}]}$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με τον περιορισμό $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$ και η T είναι συνεχής, συνεχής από τα δεξιά ή συνεχής από τα αριστερά στο $\frac{i}{i+1}$, αν η f είναι συνεχής, συνεχής από τα δεξιά ή συνεχής από τα αριστερά στο a_i , αντίστοιχα. Τότε οι απεικονίσεις f και T είναι τοπολογικά ισοδύναμες.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\underline{i}_f(a_k) = \underline{i}_T(\frac{k}{k+1})$, για κάθε $k \geq 0$ και ότι μια ακολουθία $j_0 j_1 \dots j_n$ είναι επιτρεπτή για την f αν και μόνο αν είναι επιτρεπτή για την T . Έτσι από τον Ορισμό 3.2.2 έχουμε $\Sigma_\infty(f) = \Sigma_\infty(T)$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $h = \underline{i}_T^{-1} \circ \underline{i}_f : \mathcal{C}_\infty(f) \rightarrow \mathcal{C}_\infty(T)$ η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη, επί, γνησίως αύξουσα και τέτοια ώστε $h \circ f = T \circ h$. Επειδή τα σύνολα $\mathcal{C}_\infty(f)$ και $\mathcal{C}_\infty(T)$ είναι πυκνά στο $[0, 1]$, μπορούμε να επεκτείνουμε την h σε έναν ομοιομορφισμό $\tilde{h} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ τέτοιον ώστε $\tilde{h} \circ f = T \circ \tilde{h}$. \square

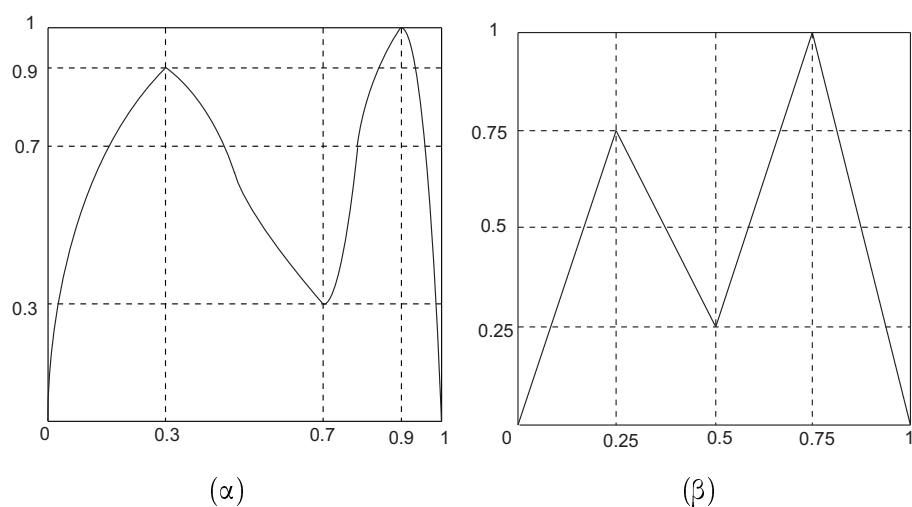
3.3 Τοπολογική εντροπία για συνεχείς απεικονίσεις

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.1, η τοπολογική εντροπία μιας απεικόνισης είναι ένα μέτρο της πολυπλοκότητας της απεικόνισης και είναι τοπολογικά αναλλοίωτη. Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την τοπολογική εντροπία των απεικονίσεων $f \in \mathcal{M}$ και $f \in \mathcal{M}_\infty$. Πιο συγκεκριμένα, στην Πρόταση 3.3.1 δίνουμε μια μέθοδο υπολογισμού της τοπολογικής εντροπίας για τις απεικονίσεις της οικογένειας \mathcal{M} . Το αποτέλεσμα αυτό είναι ήδη γνωστό [5, 37], όμως η απόδειξη που δίνουμε είναι πιο απλή και αποτελεί μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.8. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι το θεώρημα Misiurewicz-Szlenk δεν μπορεί να επεκταθεί για κατά τμήματα μονότονες απεικονίσεις με αριθμήσιμη διαμέριση.

3.3.1 Υπολογισμός της τοπολογικής εντροπίας για συνεχείς απεικονίσεις της \mathcal{M}

Έστω f μια συνεχής απεικόνιση της οικογένειας \mathcal{M} και έστω T όπως στο Θεώρημα 3.1.8. Η κλίση της T δεν είναι απαραίτητα σταθερή κατά απόλυτη τιμή (Σχήμα 3.2). Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 3.1.8 ισχύει αν αλλάξουμε τη διαμέριση $0 < \frac{1}{r} < \frac{2}{r} < \dots < \frac{r-1}{r} < 1$ με μια οποιαδήποτε άλλη διαμέριση της μορφής $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_r = 1$. Έτσι, σ' αυτή την ενότητα εξετάζουμε αν είναι δυνατόν να βρούμε μια διαμέριση $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_r = 1$ του $[0, 1]$ τέτοια ώστε η παράσταση $\frac{b_{q(i)} - b_{p(i)}}{b_i - b_{i-1}}$ να είναι σταθερή για κάθε i .

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, σε κάθε συνεχή απεικόνιση



Σχήμα 3.2: Οι δύο απεικονίσεις είναι τοπολογικά ισοδύναμες, όμως η κλίση της απεικόνισης στο (β) δεν είναι σταθερή κατά απόλυτη τιμή

$f \in \mathcal{M}$, αντιστοιχούμε ένα $r \times r$ πίνακα $A = [a_{ij}]$, όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (b_{i-1}, b_i) \cap f^{-1}(b_{j-1}, b_j) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{αν } (b_{i-1}, b_i) \cap f^{-1}(b_{j-1}, b_j) = \emptyset. \end{cases}$$

Από τον ορισμό των συναρτήσεων $f \in \mathcal{M}$ παίρνουμε

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j \in \{p(i) + 1, p(i) + 2, \dots, q(i)\}, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $i = 1, 2, \dots, r$, υπάρχει ένας τουλάχιστον j τέτοιος ώστε $a_{ij} = 1$.

Πρόταση 3.3.1 Έστω $f \in \mathcal{M}$ μια συνεχής απεικόνιση τάξης r και A ο αντίστοιχος πίνακας.

- (α) Αν υπάρχει ιδιοτιμή $s > 1$ του πίνακα A τέτοια ώστε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα να είναι θετικό, τότε η τοπολογική εντροπία της f είναι $\ln s$.
- (β) Αν για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A ισχύει $\lambda \leq 1$, ή, ένα τουλάχιστον από τα στοιχεία του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος είναι μη θετικό, τότε η τοπολογική εντροπία της f είναι μηδέν.

Απόδειξη. (α) Έστω $x = (x_1, \dots, x_r)^T$ ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή s με $\sum_{i=1}^r x_i = 1$. Τότε η ισότητα $Ax = sx$ γράφεται, ισοδύναμα, $\sum_{j=1}^r a_{ij}x_j = sx_i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, r$, και λόγω της (3.1), παίρνουμε

$$x_{p(i)+1} + x_{p(i)+2} + \dots + x_{q(i)} = sx_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.2)$$

Έστω

$$b_0 = 0 \text{ και } b_k = \sum_{i=1}^k x_i, \text{ για } k = 1, 2, \dots, r. \quad (3.3)$$

Παρατηρούμε ότι $b_k > b_{k-1}$, για $k = 1, 2, \dots, r$, γιατί

$$b_k - b_{k-1} = x_k > 0 \quad (3.4)$$

Ακόμη, $b_r = 1$, άρα, έχουμε τη διαμέριση $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_r = 1$ του $[0, 1]$. Από τις (3.3), (3.2) και (3.4) παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} b_{q(i)} - b_{p(i)} &= x_{p(i)+1} + x_{p(i)+2} + \dots + x_{q(i)} \\ &= sx_i \\ &= s(b_i - b_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.5)$$

Έστω T η κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση που έχει διαμέριση την $b_0 < b_1 < \dots < b_r$ και είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την f . Από την (3.5) προκύπτει ότι η κλίση της T είναι $\pm s$. Τότε, από το Πρόγραμμα 2.1.9, έχουμε $h(T) = \ln s$.

(β) Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή, ότι $h(f) > 0$. Τότε η f είναι τοπολογικά ισοδύναμη με μια κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση T με σταθερή κλίση κατά απόλυτη τιμή [33]. Έτσι, υπάρχει διαμέριση $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_r = 1$ του $[0, 1]$ και σταθερά $\bar{s} > 1$ τέτοια ώστε

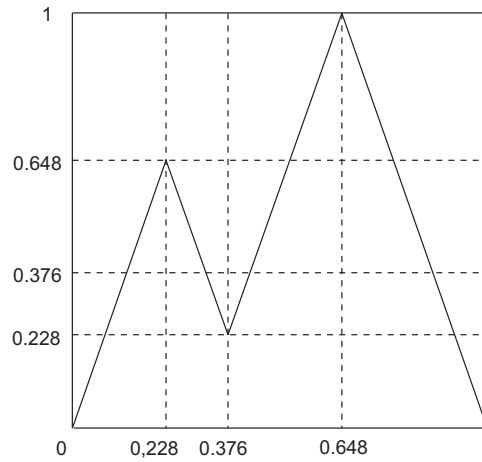
$$|T(b_{i-1}, b_i)| = \bar{s}|(b_{i-1}, b_i)|, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.6)$$

Από την (3.6) παίρνουμε $\sum_{j=p(i)+1}^{q(i)} (b_j - b_{j-1}) = \bar{s}(b_i - b_{i-1})$, η οποία λόγω της (3.1) γίνεται $\sum_{j=1}^r a_{ij}(b_j - b_{j-1}) = \bar{s}(b_i - b_{i-1})$.

Αν θεωρήσουμε το θετικό διάνυσμα $x = (b_1 - b_0, b_2 - b_1, \dots, b_r - b_{r-1})^T$, η τελευταία ισότητα γράφεται $Ax = \bar{s}x$, που είναι άτοπο. \square

3.3.2 Παράδειγμα

Θεωρούμε την απεικόνιση $f \in \mathcal{M}$, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο Σχήμα 3.2 (α). Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.8 η f είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την T , η οποία είναι κατά τμήματα γραμμική (η γραφική παράσταση της T δίνεται στο Σχήμα 3.2 (β)). Ο πίνακας που αντιστοιχεί



Σχήμα 3.3: Η απεικόνιση \tilde{T} του σχήματος έχει σταθερή κλίση κατά απόλυτη τιμή και είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τις απεικονίσεις του Σχήματος 3.2

στην f είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η μέγιστη ιδιοτιμή είναι $s = 2.8393$ και ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σ' αυτή την ιδιοτιμή είναι το

$$(0.2282, 0.1477, 0.2719, 0.3522)^T.$$

Τότε από την (3.4) έχουμε $b_0 = 0$, $b_1 = 0.2282$, $b_2 = 0.3759$, $b_3 = 0.6478$, $b_4 = 1$. Η f είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την \tilde{T} της οποίας η

γραφική παράσταση δίνεται στο Σχήμα 3.3. Επειδή η κλίση της \tilde{T} είναι σταθερή κατά απόλυτη τιμή έχουμε $h(f) = h(\tilde{T}) = \ln s = 1.0435$.

3.3.3 Τοπολογική εντροπία μιας ιδιαίτερης υποκλάσης της \mathcal{M}_∞

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το Θεώρημα 2.1.8 των Misiurewicz-Szlenk δεν ισχύει στην περίπτωση των απεικονίσεων της οικογένειας \mathcal{M}_∞ .

Πρόταση 3.3.2 *Θεωρούμε την οικογένεια των απεικονίσεων \mathcal{S} που ορίζονται από τον τύπο*

$$f_s(x) = \begin{cases} sx + (1-s)a_{2k}, & \text{αν } x \in [a_{2k}, a_{2k+1}), \text{ για } k \geq 0 \\ -sx + (1+s)a_{2k}, & \text{αν } x \in [a_{2k-1}, a_{2k}), \text{ για } k \geq 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases},$$

όπου $a_{2k} = 1 - \left(\frac{s-1}{2}\right)^k$ και $a_{2k+1} = 1 - \frac{s^2 + 2s - 3}{4s} \left(\frac{s-1}{2}\right)^k$, $k \geq 0$ και $1 < s < 3$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_\infty$.

(β) Η f_s είναι συνεχής, για κάθε $s \in (1, 3)$.

(γ) Αν $s_1, s_2 \in (1, 3)$, τότε οι f_{s_1} και f_{s_2} είναι τοπολογικά ισοδύναμες.

Απόδειξη. (α) Έστω $f_s \in \mathcal{S}$. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ αποτελεί μια διαμέριση του $[0, 1]$ με $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Επειδή $1 < s < 3$ έχουμε

$$a_{2k+1} - a_{2k} = \frac{(3-s)(s+1)}{4s} \left(\frac{s-1}{2}\right)^k > 0$$

και

$$a_{2k+2} - a_{2k+1} = \frac{3-s}{2s} \left(\frac{s-1}{2} \right)^{k+1} > 0,$$

έτσι, $a_{2k} < a_{2k+1} < a_{2k+2}$, για $k \geq 0$. Επιπλέον, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 1$, αφού $0 < \frac{s-1}{2} < 1$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Προφανώς, η f_s είναι μονότονη και C^1 στο $[a_{i-1}, a_i]$ με $|f'(x)| = s > 1$. Απομένει να αποδείξουμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$ υπάρχουν $p_s(i), q_s(i) \in \mathbb{N}$ με $p_s(i) < q_s(i)$ τέτοια ώστε $f_s(a_{i-1}, a_i) = (a_{p_s(i)}, a_{q_s(i)})$. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι

$$f_s(a_{2k}, a_{2k+1}) = (a_{2k}, a_{2k+4}), \text{ για } k \geq 0. \quad (3.7)$$

Πράγματι,

$$f_s(a_{2k}^+) = sa_{2k} + (1-s)a_{2k} = a_{2k}$$

και

$$f_s(a_{2k+1}^-) = sa_{2k+1} + (1-s)a_{2k} = 1 - \left(\frac{s-1}{2} \right)^{k+2} = a_{2k+4}.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$f_s(a_{2k-1}, a_{2k}) = (a_{2k}, a_{2k+2}), \text{ για } k \geq 1. \quad (3.8)$$

Πράγματι,

$$f_s(a_{2k-1}^+) = -sa_{2k-1} + (1+s)a_{2k} = 1 - \left(\frac{s-1}{2} \right)^{k+1} = a_{2k+2}$$

και

$$f_s(a_{2k}^-) = -sa_{2k} + (1-s)a_{2k} = a_{2k}.$$

Έτσι $f_s \in \mathcal{M}_\infty$.

(β) η f_s είναι συνεχής στο a_{2k} , για $k \geq 0$, γιατί

$$f_s(a_{2k}) = \lim_{x \rightarrow a_{2k}^+} f_s(x) = sa_{2k} + (1-s)a_{2k} = a_{2k}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow a_{2k}^-} f_s(x) = -sa_{2k} + (1+s)a_{2k} = a_{2k}.$$

Ακόμη, η f_s είναι συνεχής στο a_{2k+1} , για $k \geq 0$, γιατί

$$f_s(a_{2k+1}) = \lim_{x \rightarrow a_{2k+1}^+} f_s(x) = -sa_{2k+1} + (1+s)a_{2k+2} = 1 - \left(\frac{s-1}{2}\right)^{k+2}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow a_{2k+1}^-} f_s(x) = sa_{2k+1} + (1-s)a_{2k} = 1 - \left(\frac{s-1}{2}\right)^{k+2}.$$

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η f_s είναι συνεχής στο 1. Παρατηρούμε πρώτα ότι από τις (3.7) και (3.8) έχουμε $f_s(x) \geq a_{2k}$, για $x \geq a_{2k}$. Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε $1 - \epsilon < a_{2k}$, αφού $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$. Έστω $\delta = 1 - a_{2k}$, τότε για $x > 1 - \delta = a_{2k}$ έχουμε $f(x) > a_{2k} > 1 - \epsilon$.

(γ) Από τις (3.7) και (3.8) προκύπτει ότι

$$p(i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}, & \text{αν } i = \text{περιττός} \\ i, & \text{αν } i = \text{άρτιος} \end{cases} \quad \text{και} \quad q(i) = \begin{cases} i+3, & \text{αν } i = \text{περιττός} \\ i+2, & \text{αν } i = \text{άρτιος} \end{cases}$$

που σημαίνει ότι τα $p(i), q(i)$ είναι ανεξάρτητα από το s . Τότε, από το Θεώρημα 3.2.3 προκύπτει ότι δύο απεικονίσεις $f_{s_1}, f_{s_2} \in \mathcal{S}$ με $s_1 \neq s_2$ είναι τοπολογικά ισοδύναμες. \square

Αφού οι απεικονίσεις της οικογένειας \mathcal{S} είναι τοπολογικά ισοδύναμες, έχουν την ίδια τοπολογική εντροπία. Αυτή την τοπολογική εντροπία υπολογίζουμε στην Πρόταση που ακολουθεί.

Υπενθυμίζουμε ότι η τοπολογική εντροπία του περιορισμού $f|K$ δίνεται από τον τύπο

$$h(f|K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, K, f), \quad (3.9)$$

όπου $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ συνεχής, $K \subset [0, 1]$ συμπαγές και $r_n(\epsilon, K, f)$ ο μικρότερος πληθάριθμος που μπορεί να έχει ένα (n, ϵ) -εκτεινόμενο σύνολο για το K ως προς την f .

Πρόταση 3.3.3 Έστω $f \in \mathcal{S}$ με διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < 1$, τότε $h(f) = 0$.

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι $\Omega(f) = \{a_{2k}\}_{k=0}^{\infty} \cup \{1\}$. Προφανώς, $\{a_{2k}\}_{k=0}^{\infty} \cup \{1\} \subset \Omega(f)$, γιατί κάθε σημείου του συνόλου $\{a_{2k}\}_{k=0}^{\infty} \cup \{1\}$ είναι σταθερό. Έστω $x \in \cup_{k=0}^{\infty} (a_{2k}, a_{2k+2})$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Αν $x \in (a_{2k}, a_{2k+1})$, τότε

$$f(x) - x = (s - 1)(x - a_{2k}) > 0.$$

Αν $x \in [a_{2k+1}, a_{2k+2})$, τότε

$$f(x) - x = (s + 1)(a_{2k+2} - x) > 0.$$

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $f(x) > x$, για $x \in \cup_{k=0}^{\infty} (a_{2k}, a_{2k+2})$, έτσι, δεν υπάρχει σημείο του $\cup_{k=0}^{\infty} (a_{2k}, a_{2k+2})$ που να βρίσκεται στο μη περιπλανώμενο σύνολο $\Omega(f)$ και έτσι αποδείχτηκε ο ισχυρισμός.

Είναι γνωστό [39] ότι $h(f) = h(f|\Omega(f))$, έτσι, αρκεί να αποδείξουμε ότι $h(f|\Omega(f)) = 0$.

Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_{2k} > 1 - \epsilon$, για $k \geq N_\epsilon$, αφού $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$. Θα αποδείξουμε ότι το $F = \{a_0, a_2, \dots, a_{2N_\epsilon - 2}, 1\}$ είναι ένα (n, ϵ) -εκτεινόμενο σύνολο για το $\Omega(f)$, για κάθε $n \geq 1$.

Έστω $x \in \Omega(f)$. Αν $x \in F$, τότε για $y = x$ έχουμε $|f^i(x) - f^i(y)| = 0 < \epsilon$, για κάθε $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Αν $x \notin F$, τότε για $y = 1$ έχουμε $|x - y| < \epsilon$, και, επειδή τα σημεία x, y είναι σταθερά προκύπτει ότι $|f^i(x) - f^i(y)| = |x - y| < \epsilon$, για κάθε $i = 0, 1, \dots, n - 1$, που αποδεικνύει ότι το F είναι ένα (n, ϵ) -εχτεινόμενο σύνολο για το $\Omega(f)$. Τότε $r_n(\epsilon, \Omega(f), f) \leq \text{card}(F) = N_\epsilon + 1$. Από αυτή την ανίσωση παίρνουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, \Omega(f), f) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N_\epsilon + 1) = 0. \quad (3.10)$$

Από τις (3.9) και (3.10) παίρνουμε $h(f|\Omega(f)) = 0$. □

Κεφάλαιο 4

Κατά τμήματα γραμμικές απεικονίσεις

4.1 Γενικά

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τη δυναμική της οικογένειας \mathcal{F} των κατά τμήματα γραμμικών απεικονίσεων $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x + a, & \text{αν } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ \lambda_2 x + b, & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}, \quad (4.1)$$

όπου $a, b, \lambda_1, \lambda_2$ είναι πραγματικές σταθερές τέτοιες ώστε $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ (Σχήμα 4.1). Τα διαστήματα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$ ονομάζονται **κλάδοι** της f . Η f λέγεται **επεκτατική** σε ένα κλάδο αν έχει κλίση μεγαλύτερη της μονάδος κατά απόλυτη τιμή και **συσταλτική** αν η κλίση της είναι μικρότερη της μονάδος κατά απόλυτη τιμή.

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι επεκτατική και στους δύο κλάδους τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2 υπάρχει ένα απολύτως συνεχές αναλλοίωτο μέτρο. Αν η f είναι συσταλτική και στους δύο κλάδους τότε, όπως θα δείξουμε στην Πρόταση 4.1.1 που ακολουθεί, η τροχιά κάθε σημείου του διαστήματος $[-1, 1]$ (εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων) τείνει σε μια περιοδική τροχιά. Θα πρέπει, σε αυτό το σημείο, να τονίσουμε τις δυσκολίες που προκύπτουν εξαιτίας της ασυνέχειας της f στο σημείο 0. Έστω x_0, y_0 δύο σημεία του $[-1, 1]$ με τροχιές $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ και $O(y_0) = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$, όπου $x_n = f^n(x_0)$ και $y_n = f^n(y_0)$. Αν τα x_i, y_i είναι ομόσημα τότε $|x_{i+1} - y_{i+1}| = |\lambda_j||x_i - y_i| < |x_i - y_i|$ με $j = 1, 2$. Σύμφωνα με αυτή την παρατήρηση θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι οι τροχιές δύο τυχαίων σημείων x_0, y_0 ταυτίζονται ασυμπτωτικά, δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$. Αυτό όμως δεν ισχύει γιατί είναι δυνατόν τα x_i, y_i να είναι ετερόσημα για κάποια τιμή του i , οπότε σε αυτή την περίπτωση οι τροχιές των x_0, y_0 πιθανόν να είναι τελείως διαφορετικές.

Για παράδειγμα στον πίνακα 4.1 βλέπουμε τις τροχιές των σημείων $x_0 = 0.038$ και $y_0 = 0.039$ μέσω της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -0.5652x + 0.4375, & \text{αν } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0.8x - 0.1, & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι στις 5 πρώτες επαναλήψεις οι τροχιές πλησιάζουν όμως από την έκτη επανάληψη οι τροχιές διαφέρουν σημαντικά. Η πρώτη τροχιά τείνει στην ελκτική περιοδική τροχιά του σημείου 0.00725798 η οποία είναι περιόδου 5: $\{0.00725798, -0.0941936, 0.490738, 0.292591, 0.134072\}$ και η δεύτερη στην $\{0.105611, -0.0155112, 0.446267, 0.257014\}$ η οποία είναι περιοδική τροχιά περιόδου 4.

Στην Πρόταση που ακολουθεί περιγράφουμε τη δυναμική των συσταλτικών απεικονίσεων $f \in \mathcal{F}$. Στην απόδειξη κάνουμε συχνή χρήση του Λήμματος 2.1.1 χωρίς να το αναφέρουμε ρητά.

Πρόταση 4.1.1 Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ μια απεικόνιση με τύπο που δίνεται από την (4.1). Αν $|\lambda_1| < 1$ και $|\lambda_2| < 1$, τότε υπάρχει μία ή το πολύ δύο ελκτικές περιοδικές τροχιές, η ένωση λεκανών έλξης των οποίων είναι το σύνολο $[-1, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$, όπου το σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(0)$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. Έστω $0 \notin f(0, 1)$ και $0 \notin f(-1, 0)$. Παρατηρούμε ότι η f απεικονίζει καθένα από τα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$ εντός του $(-1, 0)$ ή του $(0, 1)$. Έτσι για τη δυναμική της f υπάρχουν 4 περιπτώσεις:

- (α) η τροχιά κάθε σημείου του $(0, 1)$ τείνει σε ένα σταθερό σημείο $x_1 \in (0, 1)$ και η τροχιά κάθε σημείου του $(-1, 0)$ τείνει σε ένα σταθερό σημείο $x_2 \in (-1, 0)$, αν $f(0, 1) \subset (0, 1)$ και $f(-1, 0) \subset (-1, 0)$,
- (β) η τροχιά κάθε σημείου του $(-1, 0) \cup (0, 1)$ τείνει σε ένα σταθερό σημείο $x_3 \in (0, 1)$, αν $f(0, 1) \subset (0, 1)$ και $f(-1, 0) \subset (0, 1)$,
- (γ) η τροχιά κάθε σημείου του $(-1, 0) \cup (0, 1)$ τείνει σε ένα σταθερό σημείο $x_4 \in (-1, 0)$, αν $f(0, 1) \subset (-1, 0)$ και $f(-1, 0) \subset (-1, 0)$,
- (δ) η τροχιά κάθε σημείου του $(-1, 0) \cup (0, 1)$ τείνει σε μια περιοδική τροχιά περιόδου 2, αν $f(0, 1) \subset (-1, 0)$ και $f(-1, 0) \subset (0, 1)$.

Έστω τώρα $0 \in f(0, 1)$ ή $0 \in f(-1, 0)$. Αν $0 \in f(-1, 0)$ και $0 \notin f(0, 1)$, τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g = h^{-1} \circ f \circ h$, όπου $h(x) = -x$. Οι f, g είναι τοπολογικά ισοδύναμες και για τη g ισχύει $0 \in g(0, 1)$. Σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση αρκεί να μελετήσουμε τη δυναμική συναρτήσεων με $0 \in f(0, 1)$. Έστω $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

1η Περίπτωση. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$. Τότε η τροχιά κάθε σημείου του διαστήματος $(0, x_0)$ τείνει στο σταθερό σημείο του $(0, x_0)$. Επειδή $f((x_0, 1]) \subset (-1, 0)$ απομένει να εξετάσουμε τη δυναμική της f στο $(-1, 0)$.

Έστω $x_0 \leq a$, τότε $f^2([-1, 0)) \subset (-1, 0)$. Άρα, η τροχιά κάθε σημείου $x \in [-1, 0) \cup (x_0, 1]$ τείνει σε μια περιοδική τροχιά περιόδου 2.

Έστω $x_0 \geq a - \lambda_1$. Αν $\Delta_1 \subset [-1, 0]$ είναι το μεγαλύτερο κλειστό διάστημα με $f(\Delta_1) \subset [0, x_0]$ και $\Delta_2 \subset [-1, 0]$ είναι το μεγαλύτερο κλειστό διάστημα με $f(\Delta_2) \subset [-1, 0]$ (πιθανώς κάποιο από τα Δ_1, Δ_2 να είναι το κενό σύνολο), τότε $[-1, 0] = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Αν x είναι ένα εσωτερικό σημείο του Δ_1 τότε η τροχιά του τείνει στο σταθερό σημείο του $(0, x_0)$, ενώ, αν το x είναι ένα εσωτερικό σημείο του Δ_2 τότε η τροχιά του τείνει στο σταθερό σημείο του Δ_2 .

Τέλος, έστω $a < x_0 < a - \lambda_1$. Τότε υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = x_0$. Θεωρούμε την ακολουθία $\{x_n\}_{n \geq 0}$ που ορίζεται από τη σχέση $f(x_n) = x_{n-1}$. Για την ακολουθία αυτή έχουμε

$$x_n = \begin{cases} x_{n-2} - \frac{\lambda_2 a + b}{\lambda_1^{\frac{n}{2}} \lambda_2^{\frac{n}{2}+1}}, & \text{αν } n = \text{άρτιος} \\ x_{n-2} - \frac{\lambda_2 a + b}{\lambda_1^{\frac{n+1}{2}} \lambda_2^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{αν } n = \text{περιττός} \end{cases}.$$

Από την τελευταία έχουμε $\dots < x_3 < x_1 < 0 < x_0 < x_2 < \dots$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_{n-2}| = \infty$. Άρα υπάρχει όρος x_{k-1} της ακολουθίας με $x_{k-1} \notin f([-1, 1])$. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να ορίσουμε τον επόμενο όρο x_k από τη σχέση $f(x_k) = x_{k-1}$. Έτσι ορίζουμε

$$\begin{cases} x_k = 1 & \text{και } x_{k+1} = -1, & \text{αν } k = \text{άρτιος} \\ x_k = -1 & \text{και } x_{k+1} = 1, & \text{αν } k = \text{περιττός} \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $f(x_{2n}, x_{2n+2}) \subset (x_{2n+1}, x_{2n-1})$ και $f(x_{2n+1}, x_{2n-1}) \subset (x_{2n-2}, x_{2n})$ για κάθε $n \geq 1$. Ακόμη, $f(x_0, x_2) = (x_1, 0)$ και $f(x_1, 0) = (a, x_0)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε σημείο $x \in (-1, x_1)$ με $x \neq x_i$ απεικονίζεται τελικά στο $(x_1, 0)$. Αν $a \geq 0$, τότε η τροχιά κάθε σημείου $x \in (x_1, 0)$ τείνει στο σταθερό σημείο του $(0, x_0)$. Αν $a < 0$, τότε υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = 0$. Η τροχιά κάθε σημείου $x \in (x_1, \xi_1)$ τείνει στο σταθερό σημείο του $(0, x_0)$ και η τροχιά κάθε σημείου $x \in (\xi_1, 0)$ τείνει στο σταθερό σημείο του $(\xi_1, 0)$.

2η Περίπτωση. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0)$. Τότε τα σημεία του διαστήματος $(0, x_0)$ τείνουν στο σταθερό σημείο του $(0, x_0)$. Επειδή $f((x_0, 1]) \subset (-1, 0)$ απομένει να εξετάσουμε τη δυναμική της f στο $(-1, 0)$.

Αν $a \leq 0$ τότε η τροχιά κάθε σημείου $x \in [-1, 0) \cup (x_0, 1]$ τείνει στο σταθερό σημείο του $[-1, 0]$.

Έστω τώρα $a > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία $\{y_n\}$ με τύπο $y_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{-a}{\lambda_1^i}$.

Η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα, $y_n \in f^{-(n+1)}(0)$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$. Έστω y_k ο μικρότερος όρος της ακολουθίας με $y_k > -1$. Ορίζουμε $y_{k+1} = -1$ και έχουμε τη διαμέριση $-1 = y_{k+1} < y_k < \dots < y_1 < y_0 < 0$ του $[-1, 0]$, με $k \geq 0$. Τότε έχουμε $f(y_{n+1}, y_n) \subset (y_n, y_{n-1})$ για κάθε $1 \leq n \leq k$ και $f(y_0, 0) = (0, a)$. Άρα, κάθε σημείο $x \in (-1, 0)$ με $x \neq y_i$ απεικονίζεται τελικά στο $(y_0, 0)$. Αν $a \leq x_0$, τότε η τροχιά κάθε σημείου $x \in (y_0, 0)$ τείνει στο σταθερό σημείο του $(0, x_0)$. Έστω τώρα $a > x_0$, τότε υπάρχει $\xi_2 \in (y_0, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2) = x_0$. Επειδή $f^2(\xi_2) = 0$ και η f είναι συσταλτική και στους δύο κλάδους έχουμε $f^2(\xi_2, 0) \subset (\xi_2, 0)$, άρα, η τροχιά κάθε σημείου του $(\xi_2, 0)$ τείνει σε μια περιοδική τροχιά περιόδου 2. Ακόμη, η τροχιά κάθε σημείου του (y_1, ξ_2) τείνει στο σταθερό σημείο

του $(0, x_0)$.

3η Περίπτωση. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0)$. Θεωρούμε την ακολουθία $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ που ορίζεται ως εξής: $z_0 = x_0$ και αν $z_i \in f(0, 1)$, τότε υπάρχει $z_{i+1} \in (z_i, 1)$ τέτοιο ώστε $z_i = f(z_{i+1})$, αλλιώς z_i είναι ο τελευταίος όρος της ακολουθίας. Η ακολουθία $\{z_n\}$ είναι πεπερασμένη και γνησίως αύξουσα. Έχουμε τη διαμέριση $0 < z_0 < z_1 < \dots < z_N < 1$ του $[0, 1]$, όπου z_N ο μεγαλύτερος όρος της ακολουθίας. Έστω $A_0 = [0, z_0], A_1 = [z_0, z_1], \dots, A_{N+1} = [z_N, 1]$. Τότε $f(A_i) \subset A_{i-1}$ για $i = 1, 2, \dots, N$ και $f(A_0) \subset (-1, 0)$. Άρα κάθε εσωτερικό σημείο του A_i απεικονίζεται τελικά στο $(-1, 0)$.

Έστω $a - \lambda_1 \leq 0$, τότε $f(-1, 0) \subset (-1, 0)$. Έτσι κάθε σημείο x του $[-1, 1]$ με $x \neq z_i$ έχει τροχιά που τείνει στο σταθερό σημείο του $(-1, 0)$.

Έστω $a < 0 < a - \lambda_1$. Τότε οι συναρτήσεις f και $g = h^{-1} \circ f \circ h$ με $h(x) = -x$, είναι τοπολογικά ισοδύναμες. Η δυναμική της g μελετήθηκε στην 2η Περίπτωση με $a > 0$.

Τέλος, έστω $a \geq 0$. Σ' αυτή την περίπτωση ενδιαφέρον έχει η μελέτη της δυναμικής μόνο των σημείων του διαστήματος $(b, 0)$ γιατί κάθε σημείο του διαστήματος $[-1, b)$ απεικονίζεται τελικά στο $(b, 0)$ και δεν επιστρέφει στο $[-1, b)$.

Θα αποδείξουμε ότι το πολύ ένα σημείο της ακολουθίας $\{z_n\}$ μπορεί να βρισκείται στο $f[b, 0)$. Πράγματι, έστω $z_{i-1}, z_i \in f([b, 0))$, τότε $A_{i-1} \subset f([b, 0))$, οπότε

$$|A_{i-1}| \leq |f([b, 0))|. \quad (4.2)$$

Όμως, $f^i(A_{i-1}) = [b, 0]$ και, άρα, $f^{i+1}(A_{i-1}) = f([b, 0])$. Επειδή η f είναι συσταλτική έχουμε $|A_{i-1}| > |f^{i+1}(A_{i-1})| = |f([b, 0])|$. Η τελευταία ανίσωση είναι αντίθετη με την (4.2) και έτσι έχουμε άτοπο.

Αν δεν υπάρχει όρος της ακολουθίας $\{z_n\}$ στο $f(b, 0)$, τότε $f(b, 0) \subset A_j$ για κάποιο $j = 0, 1, \dots, N+1$ και $f^{j+2}(b, 0) \subset (b, 0)$. Δηλαδή, υπάρχει μια ελκτική περιοδική τροχιά περιόδου $j+2$ στην οποία τείνει η τροχιά κάθε σημείου του $(b, 0)$.

Έστω τώρα $z_k \in f(b, 0)$ με $k = 0, 1, \dots, N$, τότε υπάρχει $\xi_3 \in (b, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_3) = z_k$. Σ' αυτή την περίπτωση $f^{k+3}(b, \xi_3) \subset (b, \xi_3)$ και $f^{k+2}(\xi_3, 0) \subset (\xi_3, 0)$. Άρα, η τροχιά κάθε σημείου του (b, ξ_3) τείνει σε μια περιοδική τροχιά περιόδου $k+3$ και η τροχιά κάθε σημείου του $(\xi_3, 0)$ τείνει σε μια περιοδική τροχιά περιόδου $k+2$.

4η Περίπτωση. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$. Έστω z_i και A_i όπως στην 3η Περίπτωση.

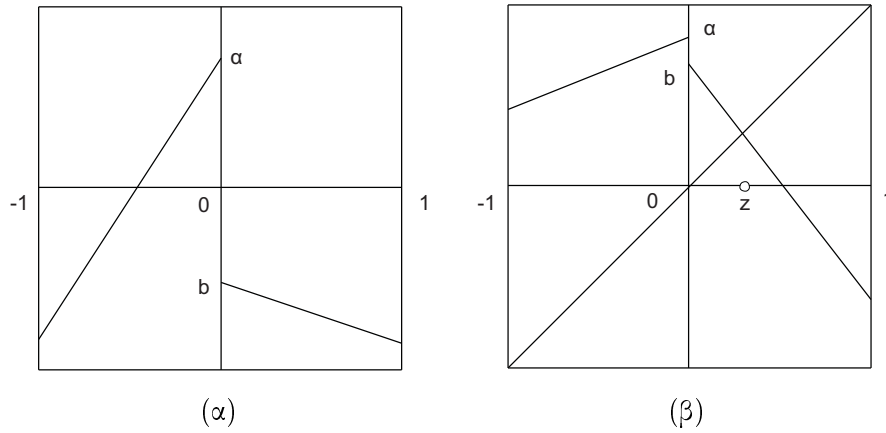
Έστω $a \leq 0$, τότε $f(-1, 0) \subset (-1, 0)$. Έτσι κάθε σημείο x του $[-1, 1]$ με $x \neq z_i$ έχει τροχιά που τείνει στο σταθερό σημείο του $(-1, 0)$.

Έστω $a - \lambda_1 \geq 0$. Όπως και στην 3η Περίπτωση με $a \geq 0$ ενδιαφερόμαστε για τη δυναμική μόνο των σημείων του $(b, 0)$. Επιπλέον, ένας το πολύ όρος της ακολουθίας $\{z_n\}$ βρίσκεται στο $f(b, 0)$.

Αν δεν υπάρχει όρος της ακολουθίας $\{z_n\}$ στο $f(b, 0)$, τότε, όπως στην 3η Περίπτωση έχουμε, $f(b, 0) \subset A_j$ για κάποιο $j = 0, 1, \dots, N+1$ και $f^{j+2}(b, 0) \subset (b, 0)$. Δηλαδή, υπάρχει μια ελκτική περιοδική τροχιά περιόδου $j+2$ στην οποία τείνει η τροχιά κάθε σημείου του $(b, 0)$.

Έστω τώρα $z_k \in f(b, 0)$ με $k = 0, 1, \dots, N$, τότε υπάρχει $\xi_4 \in (b, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_4) = z_k$. Σ' αυτή την περίπτωση $f^{k+2}(b, \xi_4) \subset (\xi_4, 0)$ και $f^{k+3}(\xi_4, 0) \subset (b, \xi_4)$. Άρα, $f^{2k+5}(b, \xi_4) \subset (b, \xi_4)$. Η τροχιά κάθε σημείου του $(b, \xi_4) \cup (\xi_4, 0)$ τείνει σε μια περιοδική τροχιά περιόδου $2k+5$.

Τέλος έστω $a - \lambda_1 < 0 < a$, τότε υπάρχει $w_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(w_0) = 0$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $z_0 > a$ ή $w_0 < b$. Έστω αντίθετα



Σχήμα 4.1: Η γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων $f \in \mathcal{F}$. Στο σχήμα (β) έχει σχεδιαστεί και η διαγώνιος $y = x$ η οποία δείχνει το σταθερό σημείο z της f

$z_0 < a$ και $w_0 > b$. Τότε $-\frac{b}{\lambda_2} < a$ και $-\frac{a}{\lambda_1} > b$ ή ισοδύναμα $\lambda_2 a > -b$ και $-\lambda_1 b > a$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισώσεις και παίρνουμε $-\lambda_1 \lambda_2 ab > -ab$ ή $ab(1 - \lambda_1 \lambda_2) > 0$, που είναι άτοπο γιατί $a > 0$, $b < 0$ και $\lambda_1 \lambda_2 < 1$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $w_0 < b$ (στην αντίθετη περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $g = h^{-1} \circ f \circ h$ με $h(x) = -x$ που είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την f και για την οποία ισχύει $w_0 < b$).

Τότε η τροχιά όλων σχεδόν των σημείων καταλήγει στο διάστημα $(b, 0)$. Για τη δυναμική των σημείων του $(b, 0)$ ισχύουν όσα αναφέραμε στην 4η Περίπτωση με $a - \lambda_1 \geq 0$. \square

Σύμφωνα με τα παραπάνω αν η f είναι επεκτατική και στους δύο κλάδους, τότε υπάρχει ένα απολύτως συνεχές αναλλοίωτο μέτρο, ενώ, αν είναι

συσταλτική και στους δύο κλάδους, τότε σχεδόν κάθε σημείο έχει τροχιά που τείνει σε μια περιοδική τροχιά. Άρα, ενδιαφέρον έχει η μελέτη της δυναμικής των απεικονίσεων που στον ένα κλάδο είναι συσταλτικές και στον άλλο επεκτατικές, δηλαδή, είτε

$$\alpha) \lambda_1 > 1 \text{ και } -1 < \lambda_2 < 0, \text{ ή (Σχήμα 4.1(α))}$$

$$\beta) 0 < \lambda_1 < 1 \text{ και } \lambda_2 < -1. \text{ (Σχήμα 4.1(β))}$$

Για τις διάφορες τιμές των σταθερών $a, b, \lambda_1, \lambda_2$ η f παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά, όσον αφορά τη δυναμική της. Αυτό συμβαίνει γιατί για ορισμένες ορισμένες τιμές αυτών των σταθερών 'υπερισχύει' η συσταλτικότητα, ενώ, για άλλες η επεκτατικότητα. Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που θα μας βοηθήσει να ξεχωρίσουμε τι από τα δύο συμβαίνει είναι η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ και $I \subset [-1, 1]$ ένα διάστημα, η **απεικόνιση πρώτης επαναφοράς** της f στο I είναι μια απεικόνιση $R : I \rightarrow I$ που ορίζεται από τον τύπο $R(x) = f^k(x)$, όπου $k = \min\{i > 0 : f^i(x) \in I\}$.

Στις παρακάτω δύο ενότητες, συμβολίζουμε με $[x]$ το ακέραιο μέρος του x , δηλαδή, τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει το x .

4.2 Η περίπτωση $\lambda_1 > 1$ και $-1 < \lambda_2 < 0$

Σε αυτή την ενότητα περιοριζόμαστε στο υποσύνολο της οικογένειας συναρτήσεων \mathcal{F} που αποτελείται από απεικονίσεις $f \in \mathcal{F}$ με $1 < \lambda_1 \leq 2$ και $-1 < \lambda_2 < 0$ (Σχήμα 4.1(α)). Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το κύριο θεώρημα χρειαζόμαστε δύο Λήμματα.

Λήμμα 4.2.1 Έστω $f \in \mathcal{F}$ με $1 < \lambda_1 \leq 2$ και $-1 < \lambda_2 < 0$. Τότε η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς $R : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ είναι καλώς ορισμένη.

Επιπλέον, υπάρχουν μια διαμέριση $0 = b_0 < b_1 < \dots < 1$ του $[0, 1)$, η οποία δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένη, και ένας ακέραιος N έτσι, ώστε ο περιορισμός $R|(b_k, b_{k+1}]$ είναι γραμμικός με κλίση $\lambda_1^{N+k} \lambda_2 < 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $f([0, 1)) \subset (-1, 1)$. Ακόμη, για κάθε $x \in (-1, 0)$, υπάρχει $n_0 \geq 1$ τέτοιος ώστε $f^{n_0}(x) \in [0, 1)$, γιατί αν υποθέσουμε το αντίθετο έχουμε

$$f^n(x) = \lambda_1^n \left(x + \frac{a}{\lambda_1 - 1} \right) - \frac{a}{\lambda_1 - 1} \rightarrow \infty, \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty,$$

που είναι άτοπο. Έτσι αποδείξαμε ότι η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς R είναι καλά ορισμένη.

Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_n\}$ που ορίζεται επαγωγικά ως εξής $a_0 = 0$ και $a_{n+1} = f^{-1}(a_n) \cap [-1, 0)$, για κάθε $n \geq 0$. (Αν το -1 δεν είναι σταθερό σημείο της f , τότε υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(a_m) \cap [-1, 0) = \emptyset$. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε $a_{m+1} = \frac{a_m - a}{\lambda_1} < -1$ οπότε η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι πεπερασμένη με $m + 2$ όρους). Με επαγωγή έχουμε

$$a_n = -\frac{a(\lambda_1^n - 1)}{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^n}, \quad n \geq 0.$$

Από την παραπάνω ισότητα έχουμε $a_n - a_{n+1} = \frac{a}{\lambda_1^{n+1}} > 0$, που σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα. Από τον τρόπο που ορίστηκε η ακολουθία $\{a_n\}$ προκύπτει ότι $b > a_n$, για κάποιο n . Έστω N ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $b > a_N$. Τότε

$$b > -\frac{a(\lambda_1^N - 1)}{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^N} \quad \text{ή} \quad N > -\frac{\ln(1 + \frac{b}{a}(\lambda_1 - 1))}{\ln \lambda_1}.$$

Έτσι

$$N = \left\lceil 1 - \frac{\ln(1 + \frac{b}{a}(\lambda_1 - 1))}{\ln \lambda_1} \right\rceil.$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε την ακολουθία $\{b_n\}$ επαγωγικά ως εξής $b_0 = 0$ και

$$b_{n+1} = \begin{cases} f^{-1}(a_{N+n}) \cap (0, 1], & \text{αν } f^{-1}(a_{N+n}) \cap (0, 1] \neq \emptyset \\ 1, & \text{αν } f^{-1}(a_{N+n}) \cap (0, 1] = \emptyset \end{cases}, \text{ για } n \geq 0.$$

Επειδή $a_{N+k} < a_{N+k-1}$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ έχουμε $b_k < b_{k+1}$, για $k \geq 0$. Έτσι έχουμε τη διαμέριση $0 = b_0 < b_1 < \dots < 1$ του $[0, 1)$ (Σχήμα 4.2). Η $f|(0, 1)$ απεικονίζει το διάστημα $(b_k, b_{k+1}]$ στο $[a_{N+k}, a_{N+k-1})$ και η $f|(-1, 0)$ απεικονίζει το $[a_{N+k}, a_{N+k-1})$ διαδοχικά στα $[a_{N+k-1}, a_{N+k-2}), \dots, [a_1, a_0), [a_0, a)$. Έτσι, ο περιορισμός $R|(b_k, b_{k+1}]$ είναι γραμμική απεικόνιση με κλίση $\lambda_1^{N+k} \lambda_2 < 0$. \square

Παρατηρήσεις. (1) Ο λογάριθμος $\ln(1 + \frac{b}{a}(\lambda_1 - 1))$ ορίζεται, γιατί η παράσταση $1 + \frac{b}{a}(\lambda_1 - 1)$ είναι θετική. Πράγματι, η ευθεία $y = \lambda_1 x + a$ βρίσκεται πάνω από την $y = x$, για κάθε $x \in (-1, 1]$, έτσι, για $x = b$ έχουμε $\lambda_1 b + a > b$. Διαιρώντας με $a > 0$ προκύπτει ότι $1 + \frac{b}{a}(\lambda_1 - 1) > 0$.

(2) Έστω $N \geq 1$ και $x \in (0, 1)$. Τότε $f^n(x) \notin (0, 1)$ για κάθε $1 \leq n \leq N$. Αυτό σημαίνει ότι N είναι ο ελάχιστος χρόνος παραμονής μιας τροχιάς στο κλάδο στον οποίο η f είναι επεκτατική. Από αυτή την παρατήρηση μπορούμε να εκτιμήσουμε πόσο χρόνο μένει η τροχιά ενός σημείου x σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

Θεωρούμε τα σημεία $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n_0-1}(x)$, όπου n_0 αρκετά μεγαλύτερο από το N . Αν r το πλήθος από αυτά ανήκουν στο $(-1, 0)$ και s το πλήθος από αυτά ανήκουν στο $(0, 1)$, τότε

$$r \geq N(s - 1). \quad (4.3)$$

Πράγματι, αν η τροχιά του σημείου x επισκεφτεί s φορές το διάστημα $(0, 1)$, τότε το διάστημα $(-1, 0)$ το επισκέπτεται τουλάχιστον $s - 1$ φορές (και το

πολύ $s + 1$). Κάθε φορά που η τροχιά εισέρχεται στο $(-1, 0)$ παραμένει σ' αυτό για N τουλάχιστον επαναλήψεις. Έτσι, το ελάχιστο πλήθος των σημείων της τροχιάς $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n_0-1}(x)$ που βρίσκονται στο $(-1, 0)$ είναι $N(s - 1)$.

Λήμμα 4.2.2 Έστω $f \in \mathcal{F}$ με $1 < \lambda_1 \leq 2$ και $-1 < \lambda_2 < 0$ και έστω $0 = b_0 < b_1 < \dots < 1$ η διαμέριση του Λήμματος 4.2.1. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $b_k \neq b_0$ τέτοιο ώστε η κλίση του περιορισμού $R|(b_k, b_{k+1}]$ είναι μικρότερη από -1 . Τότε το σύνολο των σημείων του διαστήματος $[b_k, 1]$ με τροχιές που επισκέπτονται το $(0, b_k)$, δηλαδή, το

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(0, b_k) \cap [b_k, 1]$$

είναι πυκνό στο $[b_k, 1]$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $K \subset [b_k, 1]$ τέτοιο ώστε $K \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(0, b_k) \cap [b_k, 1] \right) = \emptyset$. Τότε

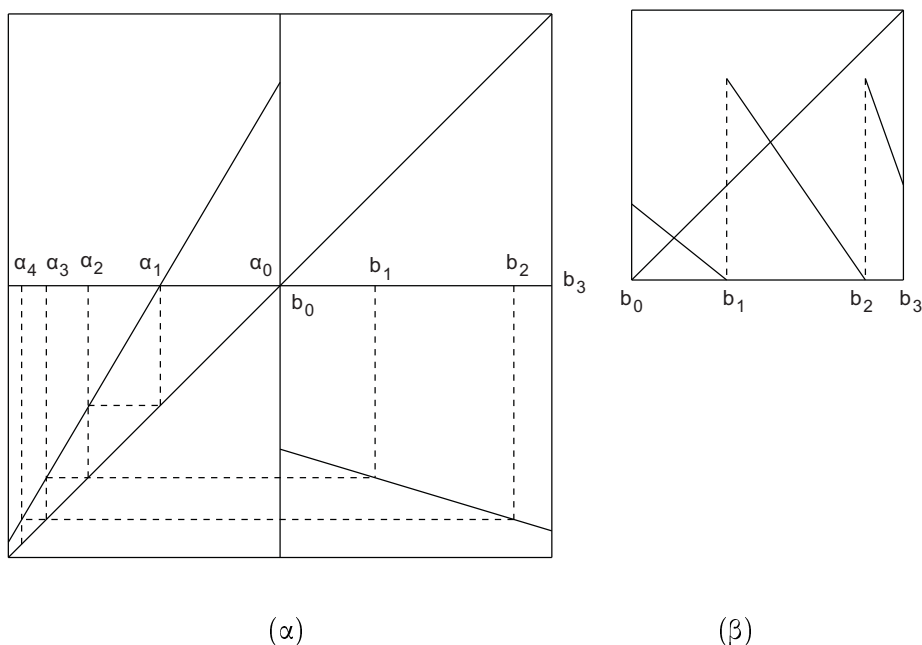
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(0, b_k) \cap K = \emptyset$$

και, έτσι,

$$f^{-n}(0, b_k) \cap K = \emptyset, \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (4.4)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in (0, b_k)$ τέτοιο ώστε $x \in f^n(K)$, για κάποιο $n \geq 1$. Τότε υπάρχει $y \in K$ έτσι, ώστε $x = f^n(y)$, δηλαδή, $y \in f^{-n}(x) \subset f^{-n}(0, b_k)$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο λόγω της (4.4). Άρα,

$$f^n(K) \cap (0, b_k) = \emptyset, \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (4.5)$$



Σχήμα 4.2: (α) Μια απεικόνιση $f \in \mathcal{F}$ με $a = 0.75$, $b = -0.6$, $\lambda_1 = 1.7$ και $\lambda_2 = -0.3$ (β) Η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς R

Προφανώς, $b_j \notin f^n(K)$, για κάθε $j > k$ και $n \geq 1$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $f^{n+N+j}(K) \cap (0, b_k) \neq \emptyset$, που είναι αντίθετο με την (4.5). Άρα, για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $i_n \geq k$ τέτοιο ώστε $f^n(K) \subset (b_{i_n}, b_{i_n+1})$.

Από την τελευταία παρατήρηση παίρνουμε για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $j_n \geq k$ τέτοιο ώστε $R^n(K) \subset (b_{j_n}, b_{j_n+1})$. Έστω l_j η κλίση του περιορισμού $R|(b_j, b_{j+1}]$. Τότε $|R^{n+1}(K)| = |l_{j_n}| \cdot |R^n(K)|$. Με επαγωγή προκύπτει ότι

$$|R^{n+1}(K)| = |l_{j_n}| |l_{j_{n-1}}| \dots |l_{j_0}| |K|.$$

Από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε $|l_k| \leq |l_j|$, για κάθε $k \leq j$. Άρα, $|l_{j_n}| |l_{j_{n-1}}| \dots |l_{j_0}| \geq |l_k|^{n+1}$ και, επειδή $|l_k| > 1$, παίρνουμε τελικά

$$|R^{n+1}(K)| \geq |l_k|^{n+1} |K| \rightarrow \infty, \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty,$$

που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 4.2.3 Έστω $f \in \mathcal{F}$ με $1 < \lambda_1 \leq 2$ και $-1 < \lambda_2 < 0$. Έστω ακόμη

$$N = \left\lceil 1 - \frac{\ln(1 + \frac{b}{a}(\lambda_1 - 1))}{\ln \lambda_1} \right\rceil.$$

Τότε για τη δυναμική της f ισχύει ένα από τα παρακάτω συμπεράσματα:

(α) Αν $\lambda_1^N \lambda_2 < -1$, τότε η f είναι τελικά επεκτατική και υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

(β) Αν $\lambda_1^N \lambda_2 = -1$, τότε υπάρχει $0 < A \leq 1$ τέτοιος ώστε κάθε $x \in (0, A)$ είναι περιδικό με περίοδο $2(N+1)$, εκτός από ένα σημείο που είναι περιδικό περιόδου $N+1$. Επιπλέον, αν $A < 1$, τότε το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(0, A) \cap [A, 1]$$

είναι πυκνό στο $[A, 1]$.

(γ) Αν $\lambda_1^N \lambda_2 > -1$, τότε υπάρχει $0 < A \leq 1$ τέτοιος ώστε κάθε $x \in (0, A)$, εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, είναι περιδικό σημείο, ή βρίσκεται στη λεκάνη έλξης κάποιας περιδικής τροχιάς. Επιπλέον, αν $A < 1$, τότε το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(0, A) \cap [A, 1]$$

είναι πυκνό στο $[A, 1]$.

Απόδειξη. (α) Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ακέραιος $n_0 > 0$ τέτοιος ώστε η επανάληψη f^{n_0} να είναι επεκτατική. Έστω $\lambda > 1$ και n_0 ακέραιος με

$$n_0 \geq \left(\frac{1}{N} + 1 \right) \frac{\ln(\lambda|\lambda_2|^{-1})}{\ln(\lambda_1|\lambda_2|^{\frac{1}{N}})} + 1.$$

Υποθέτουμε ότι r το πλήθος από τα σημεία $x, f(x), \dots, f^{n_0-1}(x)$ βρίσκονται στο $(-1, 0)$ και s το πλήθος από αυτά βρίσκονται στο $(0, 1)$. Τότε από την (4.3) έχουμε $(\frac{1}{N} + 1)r + 1 \geq n_0$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $r \geq \frac{\ln(\lambda|\lambda_2|^{-1})}{\ln(\lambda_1|\lambda_2|^{\frac{1}{N}})}$ ή, ισοδύναμα,

$$\lambda_1^r |\lambda_2|^{\frac{r}{N}+1} \geq \lambda > 1. \quad (4.6)$$

Έστω J ένας κλάδος της f^{n_0} . Η κλίση του περιορισμού $f^{n_0}|_J$ είναι $\lambda_1^r |\lambda_2|^s$. Από την (4.3) έχουμε ότι $s \leq \frac{r}{N} + 1$ και, επειδή $|\lambda_2| < 1$, έχουμε τελικά $\lambda_1^r |\lambda_2|^s \geq \lambda_1^r |\lambda_2|^{\frac{r}{N}+1}$. Έτσι, από την (4.6) προκύπτει ότι $\lambda_1^r |\lambda_2|^s \geq \lambda > 1$, που αποδεικνύει ότι η f^{n_0} είναι επεκτατική.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2, υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο, για την f , το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

(β) Σ' αυτή την περίπτωση η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς στο διάστημα $(b_0, b_1]$ είναι η $R(x) = -x + b_1$. Παρατηρούμε ότι $R(\frac{b_1}{2}) = \frac{b_1}{2}$ και ότι $R^2(x) = x$, για κάθε $x \in (b_0, b_1)$. Επειδή $R|(b_0, b_1] = f^{N+1}$, προκύπτει ότι $f^{N+1}(\frac{b_1}{2}) = \frac{b_1}{2}$ και $f^{2N+2}(x) = x$, για κάθε $x \in (0, A)$, όπου $A = b_1$.

Έστω $A < 1$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.1 η κλίση του $R|(b_1, b_2]$ είναι $\lambda_1^{N+1} \lambda_2 < \lambda_1^N \lambda_2 = -1$. Από το Λήμμα 4.2.2 έχουμε ότι το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(0, A) \cap [A, 1]$$

είναι πυκνό στο $[A, 1]$.

(γ) Έστω $k > 0$ ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\lambda_1^{N+k-1} \lambda_2 \geq -1$. Τότε ορίζουμε $A = b_k$.

Αν $A < 1$, τότε η κλίση του $R|(b_k, b_{k+1}]$ είναι μικρότερη από -1 , οπότε από το Λήμμα 4.2.2, έχουμε ότι το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(0, A) \cap [A, 1]$$

είναι πυκνό στο $[A, 1]$. Έτσι πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε σημείο $x \in (0, A)$, εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, είναι περιοδικό, ή βρίσκεται στη λεκάνη έλξης κάποιου περιοδικού ελκυστή.

Αφού $R(b_1) = b_0$ και η κλίση l_0 της $R|(b_0, b_1]$ είναι τέτοια ώστε $|l_0| < 1$, υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $p \in (b_0, b_1)$ της R . Αλλά $R|(b_0, b_1] = f^{N+1}$, έτσι, το p είναι ένα ελκτικό περιοδικό σημείο της f περιόδου $N+1$ και το διάστημα (b_0, b_1) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του p .

Για τις απεικονίσεις για τις οποίες είναι $k = 1$ η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Απομένει να εξετάσουμε τις απεικονίσεις για τις οποίες $k > 1$. Ειδικότερα, πρέπει να μελετήσουμε τη δυναμική τους στα διαστήματα $(b_1, b_2), \dots, (b_{k-1}, b_k)$.

Αφού $R(b_2) = b_0$ και η κλίση l_1 της $R|(b_1, b_2]$ είναι τέτοια ώστε $|l_1| < 1$, έχουμε ότι $R(b_1, b_2) \subset (b_0, b_2)$. Αν $R(b_1, b_2) \subset (b_0, b_1)$, τότε το διάστημα (b_1, b_2) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του p . Στην αντίθετη περίπτωση, υπάρχει $y \in (b_1, b_2)$ τέτοιος ώστε $R(y) = b_1$. Τότε το διάστημα (y, b_2) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του p , γιατί $R(y, b_2) \subset (b_0, b_1)$. Ακόμη, υπάρχει $q \in (b_1, y)$ τέτοιος ώστε $R(q) = q$. Αλλά $R|(b_1, y) = f^{N+2}$, έτσι, το σημείο q είναι ένα ελκτικό, περιοδικό σημείο της f περιόδου $N+2$ και το διάστημα (b_1, y) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του q . (Στην ειδική περι-

πτωση που είναι $k = 2$, είναι δυνατόν να ισχύει $|l_1| = 1$. Τότε ισχύουν όσα αναφέρονται σ' αυτή την παράγραφο με τη διαφορά ότι τα σημεία του $(b_1, q) \cup (q, y)$ δεν βρίσκονται στη λεκάνη έλξης του q , αλλά είναι περιοδικά περιόδου $2N + 4$).

Θα αποδείξουμε ότι η R απεικονίζει τα διαστήματα $(b_2, b_3), \dots, (b_{k-1}, b_k)$ εντός του (b_0, b_2) . Επειδή $R(x) < a$, για κάθε $x \in (b_1, b_2]$ και $|l_1| < 1$, έχουμε ότι $b_2 - b_1 > a$ οπότε $b_2 > a$. Από την τελευταία και επειδή, για κάθε $x > b_2$ είναι $R(x) < a$, έχουμε τελικά $R(x) < b_2$, για κάθε $x \in (b_2, b_k)$.
□

4.3 Η περίπτωση $0 < \lambda_1 < 1$ και $\lambda_2 < -1$

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη δυναμική των απεικονίσεων μιας ιδιαίτερης υποκλάσης της \mathcal{F} . Θεωρούμε τις απεικονίσεις $f \in \mathcal{F}$ με $0 < \lambda_1 < 1$ και $-2 \leq \lambda_2 < -1$. Για μια τέτοια απεικόνιση υπάρχει ένα μοναδικό, θετικό σταθερό σημείο, το οποίο θα συμβολίζουμε με z . Υποθέτουμε ακόμη ότι $z \leq a - \lambda_1$ (Σχήμα 4.1(β)).

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το θεώρημα που περιγράφει τη δυναμική αυτών των απεικονίσεων χρειαζόμαστε δύο Λήμματα.

Λήμμα 4.3.1 Η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς $R : (-1, 0] \rightarrow (-1, 0]$ είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον, υπάρχουν μια διαμέριση $-1 < \dots < b_1 < b_0 = 0$ του $(-1, 0]$, η οποία δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένη, και ένας ακέραιος N έτσι, ώστε ο περιορισμός $R|_{[b_{k+1}, b_k)}$ είναι γραμμικός με κλίση $\lambda_1 \lambda_2^{2N+2k-1} < 0$.

Απόδειξη. Προφανώς, $f(-1, 0) \subset (z, 1)$. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει σημείο $x \in (z, 1)$ τέτοιο ώστε $f^n(x) \in (0, 1]$, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$.

Τότε,

$$f^n(x) = \lambda_2^n \left(x + \frac{b}{\lambda_2 - 1} \right) - \frac{b}{\lambda_2 - 1}.$$

Αφού $x \neq z$ και $\lambda_2 < -1$, έχουμε ότι $|f^n(x)| \rightarrow \infty$, καθώς $n \rightarrow \infty$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα, η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς R είναι καλά ορισμένη.

Ορίζουμε τις ακολουθίες $\{a'_n\}$ και $\{a_n\}$ επαγωγικά ως εξής: $a'_0 = f^{-1}(0)$, $a_0 = 1$, $a'_{n+1} = f^{-1}(a'_n) \cap (0, 1)$ και $a_{n+1} = a'_{2n}$, για κάθε $n \geq 0$. Τότε

$$a_n = b \frac{1 - \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{2n-1}}{1 - \lambda_2}, \quad \text{για κάθε } n > 0.$$

Από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε $a_n - a_{n+1} = \frac{b(1+\lambda_2)}{\lambda_2^{2n+1}} > 0$, δηλαδή, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα. Ακόμη, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1 - \lambda_2} = z$, γιατί $|\frac{1}{\lambda_2}| < 1$, άρα, $a > a_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω N ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $a > a_N$. Τότε

$$a > b \frac{1 - \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{2N-1}}{1 - \lambda_2} \quad \text{ή} \quad N > \frac{1}{2} - \frac{\ln(-1 + \frac{a}{b}(1 - \lambda_2))}{2 \ln(-\lambda_2)}.$$

Άρα,

$$N = \left\lceil \frac{3}{2} - \frac{\ln(-1 + \frac{a}{b}(1 - \lambda_2))}{2 \ln(-\lambda_2)} \right\rceil.$$

Τέλος, ορίζουμε την ακολουθία $\{b_n\}$ επαγωγικά ως εξής $b_0 = 0$ και

$$b_{n+1} = \begin{cases} f^{-1}(a_{N+n}) \cap [-1, 0), & \text{αν } f^{-1}(a_{N+n}) \cap [-1, 0) \neq \emptyset \\ -1, & \text{αν } f^{-1}(a_{N+n}) \cap [-1, 0) = \emptyset \end{cases},$$

για κάθε $n \geq 0$.

Επειδή $a_{N+k} < a_{N+k-1}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0)$ έχουμε $b_{k+1} < b_k$, για $k \geq 0$. Η διαμέριση του $(-1, 0]$ είναι $-1 < \dots < b_1 < b_0 = 0$ (Σχήμα 4.3). Η $f|_{(-1, 0)}$ απεικονίζει το διάστημα $[b_{k+1}, b_k]$ στο $[a_{N+k}, a_{N+k-1}]$ και η $f^2|_{(0, 1)}$ απεικονίζει το $[a_{N+k}, a_{N+k-1}]$ διαδοχικά στα $[a_{N+k-1}, a_{N+k-2}), \dots, [a_1, a_0)$. Τέλος, η f απεικονίζει το $[a_1, a_0)$ στο $(-1, 0]$. Έτσι, ο περιορισμός $R|_{[b_{k+1}, b_k]}$ είναι γραμμική απεικόνιση με κλίση $\lambda_1 \lambda_2^{2(N+k-1)+1} < 0$. \square

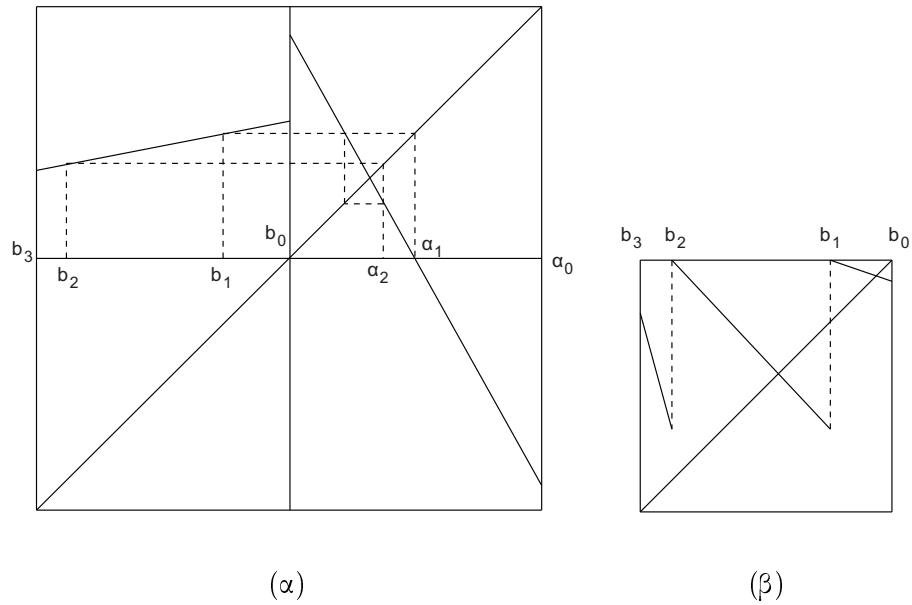
Παρατηρήσεις. (1) Ο λογάριθμος $\ln(-1 + \frac{a}{b}(1 - \lambda_2))$ ορίζεται, γιατί η παράσταση $-1 + \frac{a}{b}(1 - \lambda_2)$ είναι θετική. Πράγματι, η ευθεία $y = \lambda_2 x + b$ βρίσκεται κάτω από την $y = x$, για κάθε $x > z$, έτσι, για $x = a$ έχουμε $\lambda_2 a + b < a$. Διαιρώντας με $b > 0$ προκύπτει ότι $-1 + \frac{a}{b}(1 - \lambda_2) > 0$.

(2) Έστω $x \in (-1, 0)$, τότε $f^n(x) \notin (-1, 0)$, για κάθε $1 \leq n \leq 2N - 1$. Έτσι, $2N - 1$ είναι ο ελάχιστος χρόνος παραμονής μιας τροχιάς στο κλάδο στον οποίο η f είναι επεκτατική. Από αυτή την παρατήρηση μπορούμε να εκτιμήσουμε πόσο χρόνο μένει η τροχιά ενός σημείου x σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$.

Θεωρούμε τα σημεία $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n_0-1}(x)$, όπου n_0 αρκετά μεγαλύτερο από το $2N - 1$. Αν r το πλήθος από αυτά ανήκουν στο $(-1, 0)$ και s το πλήθος από αυτά ανήκουν στο $(0, 1)$, τότε

$$s \geq (2N - 1)(r - 1). \quad (4.7)$$

Πράγματι, αν η τροχιά του σημείου x επισκεφτεί r φορές το διάστημα $(-1, 0)$, τότε το διάστημα $(0, 1)$ το επισκέπτεται τουλάχιστον $r - 1$ φορές (και το πολύ $r + 1$). Κάθε φορά που η τροχιά εισέρχεται στο $(0, 1)$ παραμένει σ' αυτό για $2N - 1$ τουλάχιστον επαναλήψεις. Έτσι, το ελάχιστο πλήθος των σημείων της τροχιάς $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n_0-1}(x)$ που βρίσκονται στο



Σχήμα 4.3: (α) Μια απεικόνιση $f \in \mathcal{F}$ με $a = 0.55, b = 0.9, \lambda_1 = 0.2$ και $\lambda_2 = -1.8$ (β) Η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς R

διάστημα $(0, 1)$ είναι $(2N - 1)(r - 1)$.

(3) Η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς δεν ορίζεται στο σύνολο $\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-i}(z)$. Η συνθήκη $z \leq a - \lambda_1$ είναι απαραίτητη για να εξασφαλίσουμε ότι

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-i}(z) \cap (-1, 0] = \emptyset.$$

Λήμμα 4.3.2 Έστω $f \in \mathcal{F}$ με $0 < \lambda_1 < 1$ και $-2 \leq \lambda_2 < -1$ και έστω $-1 < \dots < b_1 < b_0 = 0$ η διαμέριση του Λήμματος 4.3.1. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $b_k \neq b_0$ τέτοιος ώστε η κλίση του περιορισμού $R|_{[b_{k+1}, b_k]}$ είναι μικρότερη από -1 . Τότε το σύνολο των σημείων του διαστήματος $[-1, b_k]$

των οποίων οι τροχιές επισκέπτονται το διάστημα $(b_k, 0)$, δηλαδή, το

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(b_k, 0) \cap [-1, b_k]$$

είναι πυκνό στο $[-1, b_k]$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $K \subset [-1, b_k]$ τέτοιο ώστε $K \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(b_k, 0) \cap [-1, b_k] \right) = \emptyset$. Τότε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(b_k, 0) \cap K = \emptyset$$

και, έτσι,

$$f^{-n}(b_k, 0) \cap K = \emptyset, \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (4.8)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in (b_k, 0)$ τέτοιο ώστε $x \in f^n(K)$, για κάποιο $n \geq 1$. Τότε υπάρχει $y \in K$ έτσι, ώστε $x = f^n(y)$, δηλαδή, $y \in f^{-n}(x) \subset f^{-n}(b_k, 0)$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο λόγω της (4.8). Άρα,

$$f^n(K) \cap (b_k, 0) = \emptyset, \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (4.9)$$

Προφανώς, $b_j \notin f^n(K)$, για κάθε $j > k$ και $n \geq 1$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $f^{n+2N+2j-2}(K) \cap (0, b_k) \neq \emptyset$, που είναι αντίθετο με την (4.9). Άρα, για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $i_n \geq k$ τέτοιο ώστε $f^n(K) \subset (b_{i_n+1}, b_{i_n})$.

Από την τελευταία παρατήρηση παίρνουμε για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $j_n \geq k$ τέτοιο ώστε $R^n(K) \subset (b_{j_n+1}, b_{j_n})$. Έστω l_j η κλίση του περιορισμού $R|_{[b_{j+1}, b_j]}$. Τότε $|R^{n+1}(K)| = |l_{j_n}| \cdot |R^n(K)|$. Με επαγωγή προκύπτει ότι

$$|R^{n+1}(K)| = |l_{j_n}| |l_{j_{n-1}}| \dots |l_{j_0}| |K|.$$

Από το Λήμμα 4.3.1 προκύπτει ότι $|l_k| \leq |l_j|$, για κάθε $k \leq j$. Άρα,
 $|l_{j_n}| |l_{j_{n-1}}| \dots |l_{j_0}| \geq |l_k|^{n+1}$ και, επειδή $|l_k| > 1$, έχουμε

$$|R^{n+1}(K)| \geq |l_k|^{n+1} |K| \rightarrow \infty, \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty,$$

που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 4.3.3 Έστω $f \in \mathcal{F}$ με $0 < \lambda_1 < 1$ και $-2 \leq \lambda_2 < -1$. Έστω ακόμη $z \leq a - \lambda_1$, όπου z είναι το σταθερό σημείο της f . Έστω

$$N = \left\lceil \frac{3}{2} - \frac{\ln(-1 + \frac{a}{b}(1 - \lambda_2))}{2 \ln(-\lambda_2)} \right\rceil.$$

Τότε για τη δυναμική της f ισχύει ένα από τα παρακάτω συμπεράσματα:

(α) Αν $\lambda_1 \lambda_2^{2N-1} < -1$, τότε η f είναι τελικά επεκτατική και υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

(β) Αν $\lambda_1 \lambda_2^{2N-1} = -1$, τότε υπάρχει $-1 \leq B < 0$ τέτοιος ώστε κάθε σημείο $x \in (B, 0)$ είναι περιοδικό περιόδου $4N$, εκτός από ένα σημείο που είναι περιοδικό περιόδου $2N$. Επιπλέον, αν $B > -1$, τότε το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B, 0) \cap [-1, B]$$

είναι πυκνό στο $[-1, B]$.

(γ) Αν $\lambda_1 \lambda_2^{2N-1} > -1$, τότε υπάρχει $-1 \leq B < 0$ τέτοιος ώστε κάθε σημείο $x \in (B, 0)$, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, είναι περιοδικό, ή βρίσκεται στη λεκάνη έλξης ενός ελκτικού περιοδικού σημείου. Επιπλέον, αν $B > -1$, τότε το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B, 0) \cap [-1, B]$$

είναι πυκνό στο $[-1, B]$.

Απόδειξη. (α) Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ακέραιος $n_0 > 0$ τέτοιος ώστε η επανάληψη f^{n_0} να είναι επεκτατική. Έστω $\lambda > 1$ και n_0 ακέραιος με

$$n_0 \geq \left(\frac{1}{2N-1} + 1 \right) \frac{\ln(\lambda \lambda_1^{-1})}{\ln(\lambda_1^{\frac{1}{2N-1}} |\lambda_2|)} + 1.$$

Υποθέτουμε ότι r το πλήθος από τα σημεία $x, f(x), \dots, f^{n_0-1}(x)$ βρίσκονται στο $(-1, 0)$ και s το πλήθος από αυτά βρίσκονται στο $(0, 1)$. Τότε από την (4.7) έχουμε $(\frac{1}{2N-1} + 1)s + 1 \geq n_0$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $s \geq \frac{\ln(\lambda \lambda_1^{-1})}{\ln(\lambda_1^{\frac{1}{2N-1}} |\lambda_2|)}$ ή, ισοδύναμα,

$$\lambda_1^{\frac{s}{2N-1} + 1} |\lambda_2|^s \geq \lambda > 1. \quad (4.10)$$

Έστω J ένας κλάδος της f^{n_0} . Η κλίση του περιορισμού $f^{n_0}|_J$ είναι $\lambda_1^r |\lambda_2|^s$. Από την (4.7) έχουμε ότι $r \leq \frac{s}{2N-1} + 1$ και, επειδή $0 < \lambda_1 < 1$, έχουμε τελικά $\lambda_1^r |\lambda_2|^s \geq \lambda_1^{\frac{s}{2N-1} + 1} |\lambda_2|^s$. Έτσι, από την (4.10) προκύπτει ότι $\lambda_1^r |\lambda_2|^s \geq \lambda > 1$, που αποδεικνύει ότι η f^{n_0} είναι επεκτατική.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2, υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο, για την f , το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

(β) Σ' αυτή την περίπτωση η απεικόνιση πρώτης επαναφοράς στο διάστημα $[b_1, b_0)$ είναι η $R(x) = -x + b_1$. Παρατηρούμε ότι $R(\frac{b_1}{2}) = \frac{b_1}{2}$ και ότι $R^2(x) = x$, για κάθε $x \in (b_1, b_0)$. Επειδή $R|[b_1, b_0) = f^{2N}$, προκύπτει ότι $f^{2N}(\frac{b_1}{2}) = \frac{b_1}{2}$ και $f^{4N}(x) = x$, για κάθε $x \in (B, 0)$, όπου $B = b_1$.

Έστω $B > -1$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.1 η κλίση του $R|[b_2, b_1)$ είναι $\lambda_1 \lambda_2^{2N+1} < \lambda_1 \lambda_2^{2N-1} = -1$. Από το Λήμμα 4.3.2 έχουμε ότι το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B, 0) \cap [-1, B]$$

είναι πυκνό στο $[-1, B]$.

(γ) Έστω $k > 0$ ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\lambda_1 \lambda_2^{2N+2k-3} \geq -1$. Τότε ορίζουμε $B = b_k$.

Αν $B > -1$, τότε η κλίση του $R|[b_{k+1}, b_k)$ είναι μικρότερη από -1 , οπότε από το Λήμμα 4.3.2, έχουμε ότι το σύνολο

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B, 0) \cap [-1, B]$$

είναι πυκνό στο $[-1, B]$. Έτσι, πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε σημείο $x \in (B, 0)$, εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, είναι περιοδικό, ή βρίσκεται στη λεκάνη έλξης κάποιου περιοδικού ελκυστή.

Αφού $R(b_1) = b_0$ και η κλίση l_0 της $R|[b_1, b_0)$ είναι τέτοια ώστε $|l_0| < 1$, υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $p \in (b_1, b_0)$ της R . Αλλά $R|[b_1, b_0) = f^{2N}$, έτσι, το p είναι ένα ελκτικό περιοδικό σημείο της f περιόδου $2N$ και το διάστημα (b_1, b_0) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του p .

Για τις απεικονίσεις για τις οποίες είναι $k = 1$ η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Απομένει να εξετάσουμε τις απεικονίσεις για τις οποίες $k > 1$. Ειδικότερα, πρέπει να μελετήσουμε τη δυναμική τους στα διαστήματα $(b_2, b_1), \dots, (b_k, b_{k-1})$.

Αφού $R(b_2) = b_0$ και η κλίση l_1 της $R|[b_2, b_1)$ είναι τέτοια ώστε $|l_1| < 1$, έχουμε ότι $R(b_2, b_1) \subset (b_2, b_0)$. Αν $R(b_2, b_1) \subset (b_1, b_0)$, τότε το διάστημα (b_2, b_1) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του p . Στην αντίθετη περίπτωση, υπάρχει $y \in (b_2, b_1)$ τέτοιος ώστε $R(y) = b_1$. Τότε το διάστημα (b_2, y) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του p , γιατί $R(b_2, y) \subset (b_1, b_0)$. Ακόμη, υπάρχει $q \in (y, b_1)$ τέτοιος ώστε $R(q) = q$. Αλλά $R|(y, b_1) = f^{2N+2}$, έτσι, το σημείο q είναι ένα ελκτικό, περιοδικό σημείο της f περιόδου $2N + 2$ και το διάστημα (y, b_1) βρίσκεται στη λεκάνη έλξης του q . (Στην ειδική

περίπτωση που είναι $k = 2$, είναι δυνατόν να ισχύει $|l_1| = 1$. Τότε ισχύουν όσα αναφέρονται σ' αυτή την παράγραφο με τη διαφορά ότι τα σημεία του $(y, q) \cup (q, b_1)$ δεν βρίσκονται στη λεκάνη έλξης του q , αλλά είναι περιοδικά περιόδου $4N + 4$).

Θα αποδείξουμε ότι η R απεικονίζει τα διαστήματα $(b_3, b_2), \dots, (b_k, b_{k-1})$ εντός του (b_2, b_0) . Επειδή $R(x) > f(b)$, για κάθε $x \in [b_2, b_1)$ και $|l_1| < 1$, έχουμε ότι $b_1 - b_2 > -f(b)$ οπότε $b_2 < f(b)$. Από την τελευταία και επειδή, για κάθε $x < b_2$ είναι $R(x) > f(b)$, έχουμε τελικά $R(x) > b_2$, για κάθε $x \in (b_k, b_2)$. \square

4.4 Παραδείγματα

Από το Θεώρημα 4.2.3, όπως και από το Θεώρημα 4.3.3, προκύπτει ότι, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $a, \beta, \lambda_1, \lambda_2$, οι απεικονίσεις $f \in \mathcal{F}$ παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς τη δυναμική τους. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη δυναμική της απεικόνισης

$$f(x) = \begin{cases} 1.6x + 0.6, & \text{αν } x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ \lambda_2 x - 0.57, & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}.$$

Για να καταδείξουμε τη διακλάδωση (bifurcation) που συμβαίνει, καθώς και όλες τις διαφορετικές συμπεριφορές που μπορεί να έχουν οι απεικονίσεις $f \in \mathcal{F}$, θα μελετήσουμε την παραπάνω απεικόνιση για 5 χαρακτηριστικές τιμές του λ_2 . Σε καθένα από αυτά τα παραδείγματα είναι $N = \left\lceil 1 - \frac{\ln(1 - \frac{0.57}{0.6}(1.6-1))}{\ln 1.6} \right\rceil = \lceil 2.796 \rceil = 3$.

Παράδειγμα 4.4.1 Για $\lambda_2 = -0.43$, βρίσκουμε $\lambda_1^N \lambda_2 = -1.1008 < -1$.

Από το θεώρημα 4.2.3 (α), έχουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο μ το οποίο είναι αναλλοίωτο για την f .

Έστω $E \subset [-1, 1]$ ένα διάστημα, τότε σύμφωνα με το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1(\mu)$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_E(f^k(x)) \rightarrow g(x) \quad (4.11)$$

μ -σχεδόν για κάθε $x \in [-1, 1]$, όπου χ_E η χαρακτηριστική συνάρτηση στο σύνολο E . Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n-1} \chi_E(f^k(x))$ εκφράζει το πλήθος των σημείων της τροχιάς $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ μήκους n που βρίσκονται στο E . Επειδή το μέτρο μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, έχουμε από την (4.11) ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$, έκτος από ένα σύνολο σημείων με μέτρο Lebesgue μηδέν, η συχνότητα της τροχιάς $O(x)$ στο E είναι $g(x)$.

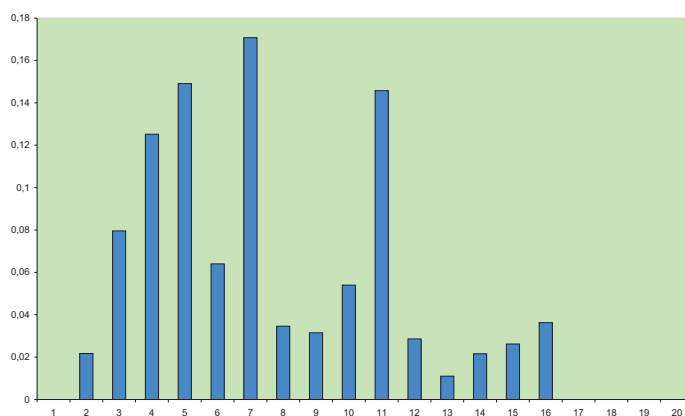
Αν το μέτρο μ είναι επιπλέον εργοδικό, τότε η συνάρτηση g είναι σταθερή μ -σχεδόν παντού. Σ' αυτή την περίπτωση από το Εργοδικό Θεώρημα του Birkhoff, έχουμε ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_E(f^k(x)) \rightarrow \mu(E)$$

μ -σχεδόν για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Για να κατασκευάσουμε το Σχήμα 4.4, χωρίσαμε το διάστημα $[-1, 1]$ σε 20 διαστήματα ίσου πλάτους και στη συνέχεια, αφού υπολογίσαμε μια τροχιά μήκους 10000 με αρχική τιμή $x_0 = 0.1$, απεικονίσαμε τη συχνότητα εμφάνισης των σημείων της τροχιάς σε καθένα από τα διαστήματα της διαμέρισης.

Ανάλογοι υπολογισμοί με διαφορετικά αρχικά σημεία έχουν δώσει κατανομή συχνοτήτων όμοια με αυτή του Σχήματος 4.4, το οποίο είναι μια



Σχήμα 4.4: Η κατανομή συχνοτήτων μιας τροχιάς με $x_0 = 0.1$

ένδειξη ότι το μέτρο μ είναι εργοδικό. Η απόδειξη αυτής της εικασίας είναι ανοιχτό πρόβλημα.

Παράδειγμα 4.4.2 Για $\lambda_2 = -0.390625$, έχουμε $\lambda_1^N \lambda_2 = -1$ και $b_1 = 0.1008$. Όλα τα σημεία του συνόλου $(0, \frac{b_1}{2}) \cup (\frac{b_1}{2}, b_1)$ είναι περιοδικά περιόδου 6. Το σημείο $\frac{b_1}{2} = 0.0504$ είναι περιοδικό περιόδου 3 (Θεώρημα 4.2.3 (β)). Το σύνολο των σημείων $x \in (b_1, 1)$, για τα οποία $f^k(x) \in (0, b_1)$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, είναι πυκνό στο $[b_1, 1]$.

Τα τρία παραδείγματα που ακολουθούν αναφέρονται στην περίπτωση (γ) του Θεωρήματος 4.2.3. Όπως θα δούμε σε αυτή την περίπτωση, είναι δυνατόν να υπάρχει μια ελκτική περιοδική τροχιά, δύο ελκτικές περιοδικές τροχιές, ή μια ελκτική περιοδική τροχιά και ένα διαστήμα με την ιδιότητα κάθε σημείο του να είναι περιοδικό.

Παράδειγμα 4.4.3 Για $\lambda_2 = -0.3$, έχουμε $\lambda_1^N \lambda_2 = -0.768 > -1$ και $\lambda_1^{N+1} \lambda_2 = -1.2288 < -1$. Σ' αυτή την περίπτωση είναι $b_1 = 0.13125$ και $b_2 = 0.61953$.

Όλα τα σημεία του διαστήματος $(0, b_1)$ βρίσκονται στη λεκάνη έλξης της περιοδικής τροχιάς $\{-0.587104, -0.339367, 0.0570136\}$. Το σύνολο των σημείων $x \in (b_1, 1)$, για τα οποία $f^k(x) \in (0, b_1)$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, είναι πυκνό στο $[b_1, 1]$.

Παράδειγμα 4.4.4 Για $\lambda_2 = -0.244140625$, έχουμε $\lambda_1^N \lambda_2 = -0.625 > -1$ και $\lambda_1^{N+1} \lambda_2 = -1$. Σ' αυτή την περίπτωση είναι $b_1 = 0.16128$ και $b_2 = 0.76128$.

Όλα τα σημεία του διαστήματος $(0, b_1)$ βρίσκονται στη λεκάνη έλξης της περιοδικής τροχιάς $\{-0.585144, -0.336231, 0.0620308\}$. Ακόμη, όλα τα σημεία του συνόλου $(b_1, \frac{b_2}{2}) \cup (\frac{b_2}{2}, b_2)$ είναι περιοδικά περιόδου 8. Το σημείο $\frac{b_2}{2} = 0.38064$ είναι περιοδικό περιόδου 4. Τέλος, το σύνολο των σημείων $x \in (b_2, 1)$, για τα οποία $f^k(x) \in (0, b_2)$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, είναι πυκνό στο $[b_2, 1]$.

Παράδειγμα 4.4.5 Για $\lambda_2 = -0.2$, έχουμε $\lambda_1^N \lambda_2 = -0.512 > -1$ και $\lambda_1^{N+1} \lambda_2 = -0.8192 > -1$. Σ' αυτή την περίπτωση είναι $b_1 = 0.196875$ και $b_2 = 0.929297$.

Όλα τα σημεία του διαστήματος $(0, b_1)$ βρίσκονται στη λεκάνη έλξης της περιοδικής τροχιάς $\{-0.583333, -0.333333, 0.0666667\}$. Ακόμη, όλα τα σημεία του διαστήματος (b_1, b_2) βρίσκονται στη λεκάνη έλξης της περιοδικής τροχιάς $\{-0.653694, -0.44591, -0.113456, 0.41847\}$. Τέλος, το σύνολο των σημείων $x \in (b_2, 1)$, για τα οποία $f^k(x) \in (0, b_2)$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, είναι πυκνό στο $[b_2, 1]$.

n	$f^n(x_0)$	$f^n(y_0)$	n	$f^n(x_0)$	$f^n(y_0)$
0	0.038	0.039	16	-0.0944988	0.105144
1	-0.0696	-0.0688	17	0.490911	-0.015885
2	0.476838	0.476386	18	0.292729	0.446478
3	0.28147	0.281109	19	0.134183	0.257183
4	0.125176	0.124887	20	0.00734628	0.105746
5	0.000141015	-0.0000904909	21	-0.094123	-0.0154032
6	-0.0998872	0.437551	22	0.490698	0.446206
7	0.493956	0.250041	23	0.292559	0.256965
8	0.295165	0.100033	24	0.134047	0.105572
9	0.136132	-0.0199738	25	0.00723753	-0.0155426
10	0.00890559	0.448789	26	-0.09421	0.446285
11	-0.0928755	0.259031	27	0.490747	0.257028
12	0.489993	0.107225	28	0.292598	0.105622
13	0.291995	-0.0142199	29	0.134078	-0.0155022
14	0.133596	0.445537	30	0.00726271	0.446262
15	0.00687654	0.25643	31	-0.0941898	0.257009

Πίνακας 4.1: Δύο διαφορετικές τροχιές μιας κατά τμήματα γραμμικής απεικόνισης που είναι συσταλτική και στους δύο κλάδους

Βιβλιογραφία

- [1] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. MacAndrew, Topological entropy, Trans. A.M.S. **114**, (1965) 309-319.
- [2] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos, An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] L. Alsedà, J. Llibre, and M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [4] D. Berry, B. D. Mestel, Wandering intervals for Lorenz maps with bounded nonlinearity, Bull. London Math. Soc. **23**, (1991), 183-189.
- [5] L. S. Block, W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lect. Notes in Math., **1513** Springer, Berlin, 1992.
- [6] A. M. Blokh, M. Y. Lyubich, Attractors of maps of the interval, Funct. Anal. and Appl. **21**, (1987) 70-71.
- [7] A. M. Blokh, M. Y. Lyubich, Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems II. The smooth case, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **9**, (1989) 751-758.

- [8] M. A. Boudourides, N. A. Fotiades, Piecewise linear interval maps both expanding and contracting, *Dynam. & Stabil. Sys.* **15:4**, (2000), 343-351.
- [9] R. E. Bowen, Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, *Trans. A.M.S.* **153**, (1971) 401-414.
- [10] A. Boyarsky, P. Góra, *Laws of Chaos, Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [11] P. Collet, J. P. Eckmann, *Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [12] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sibmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Springer LNM **527**, 1976.
- [13] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed. Addison Wesley, 1989.
- [14] E. I. Dinaburg, The relation between topological entropy and metric entropy, *Soviet. Math.* **11**, (1970) 13-16.
- [15] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [16] N. A. Fotiades, M. A. Boudourides, Topological conjugacies of piecewise monotone interval maps, *IJMMS.* **25:2**, (2001) 119-127.
- [17] J. Guckenheimer, On bifurcations of maps of the interval, *Invent. Math.* **39**, (1977) 165-178.

- [18] J. Guckenheimer, Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps, *Commun. Math. Phys.* **70**, (1979) 133-160.
- [19] J. Guckenheimer, S. Johnson, Distortion of S-unimodal maps, *Ann. Math.* **132**, (1990) 71-130.
- [20] J. H. Hubbard, C. T. Sparrow, The classification of topologically expansive Lorenz maps, *Comm. on Pure and App. Math.* **XLIII**, (1990) 431-443.
- [21] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [22] G. Keller, Exponents, attractors and Hopf decompositions for interval maps, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **10**, (1990) 717-744.
- [23] A. Lasota, J. A. Yorke, On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, *Trans. A. M. S.* **186**, 481-488.
- [24] M. Y. Lyubich, Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems I. The case of negative Schwarzian derivative, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **9**, (1989) 737-750.
- [25] M. Y. Lyubich, J. Milnor, The Fibonacci unimodal map, *Journ. A.M.S.* **6**, (1993) 425-457.
- [26] R. Mañé, *Ergodic Theory of Differentiable Dynamics*, Springer Verlag, 1987.
- [27] M. Martens, W. de Melo, S. van Strien, Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics, *Acta Math.* **168**, (1992) 273-318.

- [28] R. B. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261**, (1976) 459-467.
- [29] W. de Melo, S. van Strien, One dimensional dynamics: The Schwarzian derivative and beyond, *Bull. A.M.S.* **18**, (1988) 159-162.
- [30] W. de Melo, S. van Strien, A structure theorem in one dimensional dynamics, *Ann. Math.* **129**, (1989) 519-546.
- [31] W. de Melo, S. van Strien, *One Dimensional Dynamics*, Springer Verlag, Berlin 1993.
- [32] M. Metropolis, M. L. Stein, P. R. Stein, On finite limit sets for transformations of the unit interval, *J. Combin. Theory* **15**, (1973) 25-44.
- [33] J. Milnor, W. Thurston. *On Iterated Maps of the Interval: I, II*. Princeton preprint, 1977. *Lect. Notes Math.*, **1342** (1988), 465-563.
- [34] M. Misiurewicz, W. Szlenk, Entropy of piecewise monotone mappings, *Studia Math.* **67**, (1980) 45-63.
- [35] W. Parry, Symbolic dynamics and transformations of the unit interval, *Trans. A. M. S.* **122**, (1966) 368-378.
- [36] K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
- [37] M. Pollicott, M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, London Math. Soc. Student Texts **40**, Cambridge Univ. Press, 1998.

- [38] A. Sarkovskii, Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, Ukrain. Math. Zh. **16**, 61-71.
- [39] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, GTM Springer-Verlag, 1981.

Ευρετήριο

- (n, ε) -διαχωρισμένο σύνολο, 9
 (n, ε) -εκτεινόμενο σύνολο, 9
- αναλλοίωτο μέτρο, 13
απεικόνιση μετατόπισης, 17
απεικόνιση πρώτης επαναφοράς, 40
απολύτως συνεχές μέτρο, 13
ασυμφωνία τάξης n , 18
- διακλάδωση, 54
διακριτό δυναμικό σύστημα, 2
- ελκυστής χαοτικός, 12
επεκτατική απεικόνιση, 14, 33
 κατά τμήματα, 14
 τελικώς, 14
επιτρεπτή ακολουθία συμβόλων, 16
Εργοδικό θεώρημα του Birkhoff,
 13
εργοδικό μέτρο, 13
- θεώρημα Lasota-Yorke, 14
- θεώρημα Misiurewicz-Szlenk, 12
- κλάδος, 11
κρίσιμο σημείο, 16
- λεκάνη έλξης, 8
- μεταβολή, 12
μη περιπλανώμενο σύνολο, 8
- περιοδικό σημείο, 7
 ελκτικό, 8
 τελικώς, 7
περιοδικός ελκυστής, 8
πορεία, 16
- σταθερό σημείο, 7
συνεχές δυναμικό σύστημα, 2
συνθήκη Markov, 15
συσταλτική απεικόνιση, 33
- τάξη απεικόνισης, 16
τοπολογική εντροπία, 10

τοπολογική ισοδυναμία, 8

τροχιά, 7

μήκους n , 7

περιοδική, 7

ω -οριακό, 8