

Οδηγός εκμάθησης του Geogebra 4



Νίκος Φωτιάδης
Επιμορφωτής Β' Επιπέδου ΠΕ 03

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές είναι ένας σύντομος οδηγός εκμάθησης του προγράμματος geogebra 4 το οποίο διδάσκεται κατά την επιμόρφωση των καθηγητών κλάδου ΠΕ 03 για την αξιοποίηση και χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδακτική πράξη (Β΄ επίπεδο). Στις πρώτες επιμορφώσεις οι επιμορφούμενοι γνώρισαν το πρόγραμμα geogebra 3. Η νέα έκδοση, geogebra 4, έχει αρκετές ομοιότητες με την παλιά έκδοση αλλά και ορισμένες διαφορές. Μπορεί κάποιος να εγκαταστήσει το πρόγραμμα geogebra 4 από την ιστοσελίδα

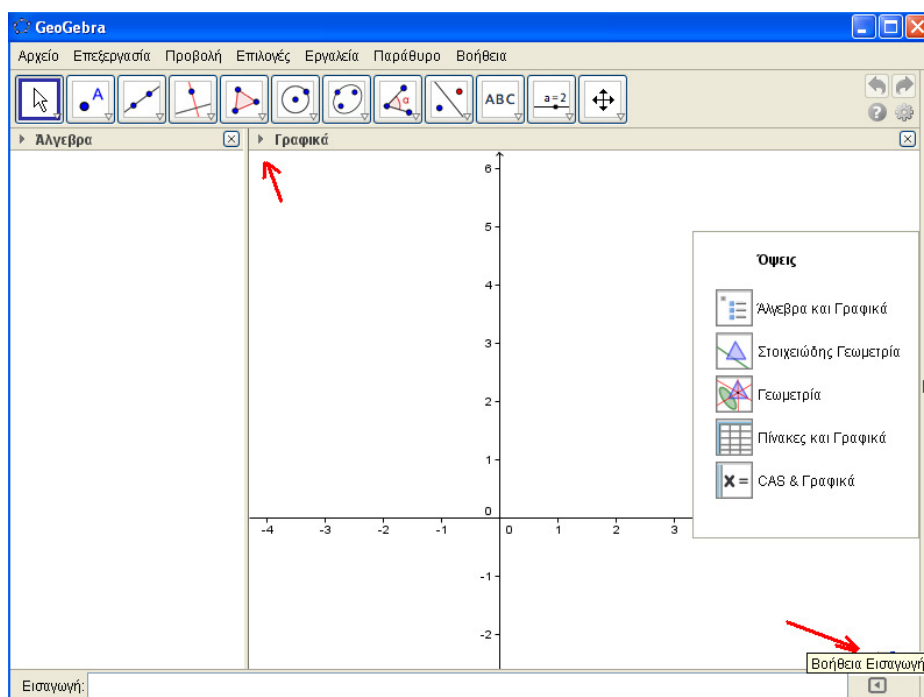
<http://www.geogebra.org/cms/el/>

Ο οδηγός αυτός υπάρχει και στην ιστοσελίδα μου <http://users.sch.gr/nfotiades/> στην ενότητα “Μαθηματικά & υπολογιστές”.

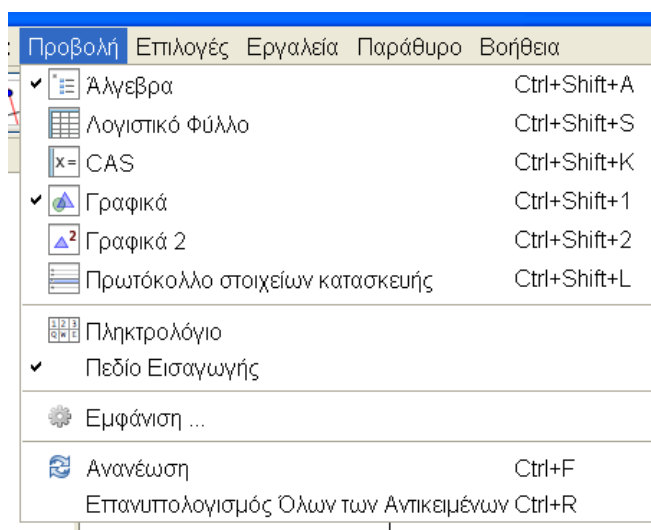
Γνωριμία με το Geogebra 4

Το περιβάλλον εργασίας στο Geogebra μπορεί να πάρει διάφορες όψεις. Διαλέγουμε την όψη που επιθυμούμε ανάλογα με την εργασία που έχουμε να κάνουμε.

Όταν ανοίγουμε το πρόγραμμα εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο. Στο ορθογώνιο με τον τίτλο Όψεις μπορούμε να διαλέξουμε ανάμεσα σε 5 επιλογές.



Με το μενού Προβολή έχουμε τη δυνατότητα να αλλάζουμε την όψη στο περιβάλλον εργασίας. Οι επιλογές που εμφανίζονται (Άλγεβρα, Λογιστικό Φύλλο κλπ) λειτουργούν ως διακόπτες. Με ένα πάτημα εμφανίζεται το αντίστοιχο παράθυρο στο περιβάλλον εργασίας και με ένα δεύτερο πάτημα εξαφανίζεται το παράθυρο.

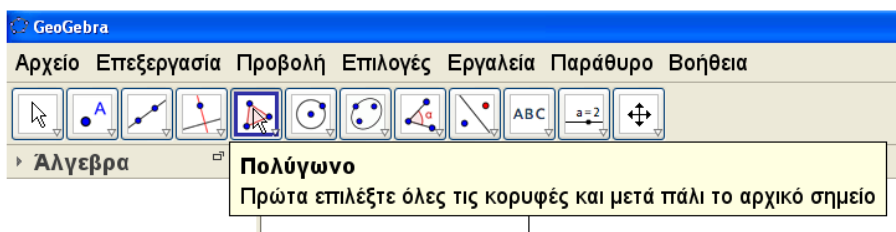


Στα αριστερά της λέξης Γραφικά υπάρχει ένα τρίγωνο. Αν πατήσουμε πάνω του εμφανίζονται κάποια κουμπιά με τα οποία μπορούμε να εμφανίσουμε ή να αποκρύψουμε τους άξονες και το πλέγμα. (Μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν κάνουμε δεξί κλικ μέσα στην περιοχή εργασίας στο παράθυρο Γραφικά).

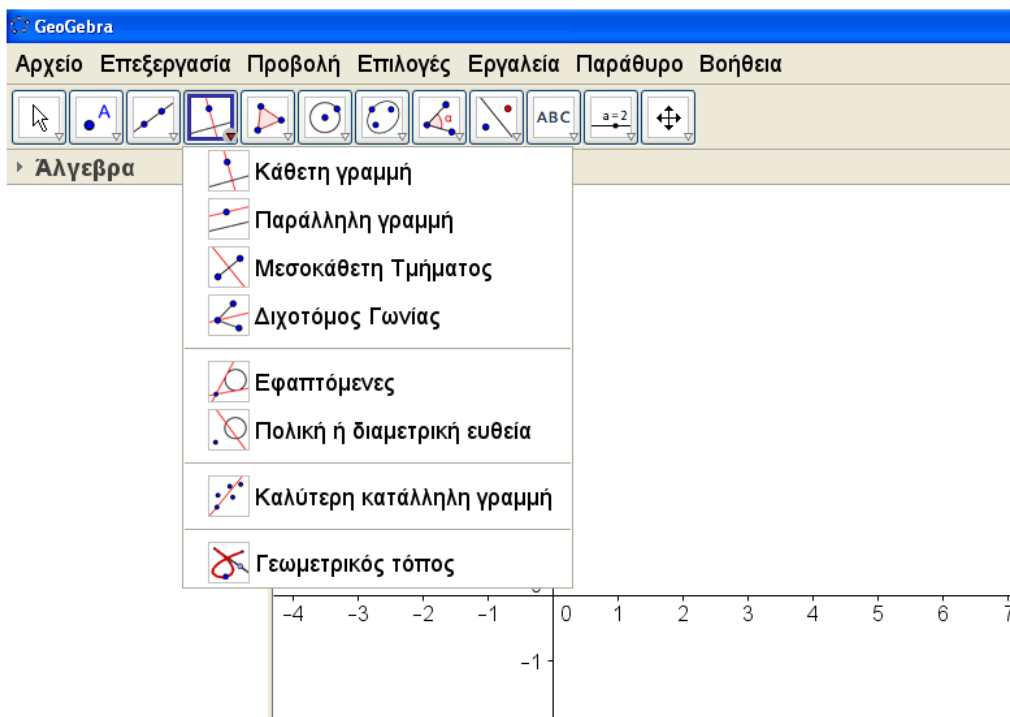
Στο κάτω μέρος της περιοχής εργασίας υπάρχει το πεδίο της Εισαγωγής. Αν δεν φαίνεται το εμφανίζουμε από το μενού Προβολή → Πεδίο Εισαγωγής. Στα δεξιά του πεδίου Εισαγωγής υπάρχει ένα κουμπί με ένα τρίγωνο στο εσωτερικό του. Με το κουμπί αυτό ενεργοποιείται η Βοήθεια Εισαγωγής.

Η μπάρα εργαλείων

Αν βάλουμε το δείκτη πάνω από ένα κουμπί στη μπάρα εργαλείων εμφανίζεται ένα πλαίσιο που μας ενημερώνει για τον τρόπο λειτουργίας του κουμπιού.



Αν πατήσουμε παρατεταμένα στο κάτω μέρος ενός κουμπιού στη μπάρα εργαλείων αναδιπλώνεται ένα μενού.



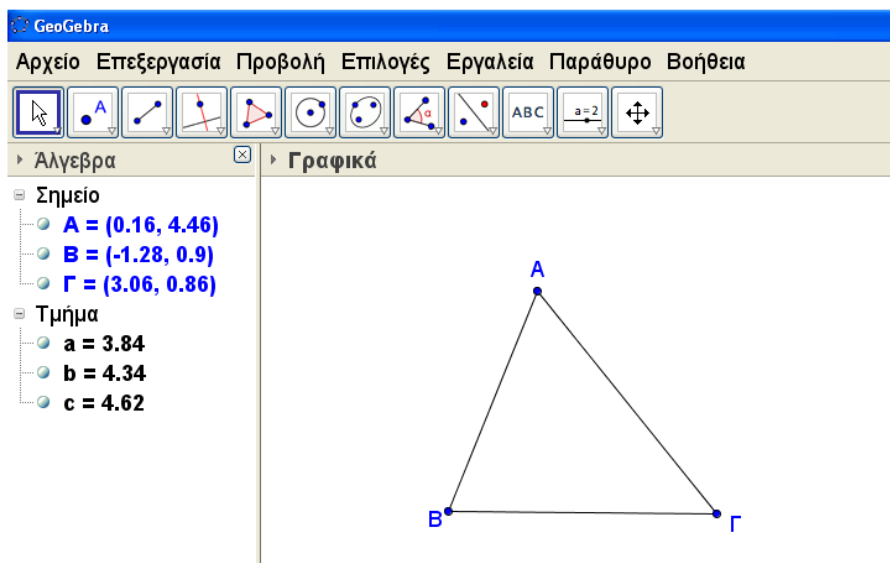
Βασικές λειτουργίες

Ανοίγουμε το Geogebra και από τις Όψεις επιλέγουμε Άλγεβρα και Γραφικά. Αποκρύπτουμε τους άξονες (είτε πατάμε στο τρίγωνο δίπλα στη λέξη Γραφικά ή δεξί κλικ οπουδήποτε μέσα στο παράθυρο Γραφικά).

Με το εργαλείο Τμήμα μεταξύ δύο σημείων σχεδιάζουμε τρία διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα. Σε κάθε σημείο εμφανίζεται η ετικέτα του (δηλαδή κάποιο κεφαλαίο γράμμα Α, Β, Γ κλπ) ενώ ταυτόχρονα στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζονται οι συντεταγμένες κάθε σημείου.

Στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται το μήκος κάθε τμήματος. Σε κάθε τμήμα έχει αποδοθεί κάποιο πεζό λατινικό γράμμα a , b , c κλπ.

Προσοχή: Το πρόγραμμα δίνει αυτόματα ετικέτα σε κάθε νέο αντικείμενο. Έτσι τα τμήματα που σχεδιάσαμε είναι με τη σειρά AB , $BΓ$, $ΓΑ$ και το πρόγραμμα έδωσε τις ετικέτες a , b , c με την ίδια σειρά. Έτσι έχουμε $AB = a$, $BΓ = b$ και $ΓΑ = c$. Η αντιστοίχιση αυτή δεν συμφωνεί με τον μαθηματικό τρόπο χαρακτηρισμού των πλευρών ενός τριγώνου με πεζά γράμματα.



Κάνουμε δεξί κλικ πάνω στο σημείο A στο παράθυρο της Γεωμετρίας ή πάνω στις συντεταγμένες του σημείου A στο παράθυρο της Άλγεβρας.

- Οι επιλογές Δείξε το αντικείμενο και Δείξε την ετικέτα λειτουργούν ως διακόπτες. Με ένα πάτημα εξαφανίζεται και με ένα επόμενο πάτημα εμφανίζεται το αντικείμενο ή η ετικέτα.

Προσοχή: Όταν αποκρύπτουμε ένα σημείο τότε για να το εμφανίσουμε πάλι πρέπει να κάνουμε δεξί κλικ πάνω στις συντεταγμένες του στο παράθυρο της Άλγεβρας.

- Και η επιλογή Ίχνος ενεργό λειτουργεί ως διακόπτης για την εμφάνιση ή την απόκρυψη του ίχνους ενός σημείου.
- Με την επιλογή Μετονομασία μπορούμε να αλλάζουμε το όνομα του σημείου.
- Με την επιλογή Ιδιότητες ανοίγει ένα παράθυρο στο οποίο μπορούμε να κάνουμε πολλές ρυθμίσεις για το σημείο.

Ανάλογες επιλογές υπάρχουν αν κάνουμε δεξί κλικ πάνω σε ένα τμήμα (στο παράθυρο της Γεωμετρίας) ή πάνω στο μήκος του (στο παράθυρο της Άλγεβρας).

Στην μπάρα εργαλείων πατάμε το κουμπί Μετακίνηση (το πρώτο από τα αριστερά). Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε ένα αντικείμενο (σημείο ή τμήμα) και να το μετακινήσουμε. Υπάρχει η δυνατότητα να ορίσουμε το αντικείμενο να είναι σταθερό (να μην μετακινείται).

Δεξί κλικ → Ιδιότητες → Βασικά → Σταθερό αντικείμενο

Με τη διαδικασία Επιλογές → Μέγεθος γραμματοσειράς ρυθμίζουμε το μέγεθος των γραμμάτων.

Με το κουμπί Γωνία ενεργοποιημένο μπορούμε να μετρήσουμε τις γωνίες του τριγώνου. Για να μετρήσουμε τη γωνία \hat{A} πατάμε διαδοχικά στα σημεία Γ, Α, Β. Παρατηρούμε ότι με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε τη μη κυρτή γωνία. Στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται η μέτρηση για την τιμή της γωνίας. Πατάμε πάνω στη μέτρηση και κάνουμε Delete. Στη συνέχεια ενεργοποιούμε πάλι το κουμπί Γωνία και πατάμε διαδοχικά στα σημεία Β, Α, Γ.

Παρατηρήσεις:

(α) Το εργαλείο για τη μέτρηση της γωνίας την μετράει κατά τη θετική φορά (προσανατολισμένη γωνία).

(β) Για τη μέτρηση της γωνίας αντί να πατήσουμε διαδοχικά στα σημεία Β, Α, Γ μπορούμε εναλλακτικά να πατήσουμε πρώτα στο τμήμα ΑΒ και έπειτα στο τμήμα ΑΓ.

Μετράμε και τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου.

Μπορούμε να αλλάξουμε την ακρίβεια των μετρήσεων με τη διαδικασία
Επιλογές → Στρογγυλοποίηση σε

Μπορούμε να μεταφέρουμε το σχήμα σε έγγραφο Word. Με τον δείκτη ενεργοποιημένο (δηλαδή το κουμπί Μετακίνηση) σαρώνουμε μια ορθογώνια περιοχή που περιέχει το σχήμα. Ακολουθούμε τη διαδικασία

Αρχείο → Εξαγωγή → Σχέδιο στη μνήμη

Στη συνέχεια κάνουμε επικόλληση στο Word.

Τέλος, υπολογίζουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου. Ας υποθέσουμε ότι στα μέτρα των γωνιών του τριγώνου έχουν αποδοθεί οι ετικέτες α , β , γ . Στο πεδίο Εισαγωγή πληκτρολογούμε $\alpha + \beta + \gamma$ και πατάμε Enter.

Εξίσωση γραμμής

Ανοίγουμε τα παράθυρα Άλγεβρα, Γραφικά, Λογιστικό Φύλλο.

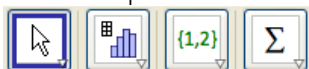
Στα κελιά A1 και A2 γράφουμε 0 και 0.2 αντίστοιχα. Μαρκάρουμε με το δείκτη τα δύο κελιά και πιάνουμε το ορθογώνιο πλαίσιο από τη γωνία κάτω δεξιά. Με το δείκτη πατημένο σέρνουμε προς τα κάτω μέχρι το κελί A21. Έτσι συμπληρώνονται τα κελιά από το A1 μέχρι το A21 με αριθμούς από το 0 μέχρι το 4 οι οποίοι αυξάνουν ανά 0,2.

Στο κελί B1 γράφουμε $2 * A1$ και πατάμε Enter. Στη συνέχεια πατάμε στο κελί B1, με τον δείκτη πιάνουμε το ορθογώνιο πλαίσιο του κελιού και με τον δείκτη πατημένο σέρνουμε προς τα κάτω μέχρι το κελί B21. Έτσι συμπληρώνονται τα κελιά από το B1 μέχρι το B21. Με αυτό τον τρόπο έχουμε συμπληρώσει έναν πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $y = 2x$.

Μαρκάρουμε τα κελιά τα οποία είναι συμπληρωμένα με αριθμούς και κάνουμε δεξί κλικ πάνω στη μαρκαρισμένη περιοχή.

Δημιουργία → Λίστα σημείων

Στην Μπάρα εργαλείων είναι πιθανό να φαίνονται τα εικονίδια



Αν κάνουμε κλικ στο παράθυρο Άλγεβρα ή Γραφικά εμφανίζονται τα γνωστά εικονίδια.

Στο παράθυρο της Άλγεβρας πατάμε πάνω στις συντεταγμένες του σημείου A και με το πλήκτρο Shift πατημένο πατάμε πάνω στις συντεταγμένες του σημείου Φ. Έτσι μαρκάρονται όλα τα σημεία. Στη μαρκαρισμένη περιοχή κάνουμε δεξί κλικ.


Δείξε την Ετικέτα.

Στη συνέχεια ξανά δεξί κλικ στην ίδια μαρκαρισμένη περιοχή.

Ιδιότητες → Στυλ

και επιλέγουμε το μέγεθος σημείου να είναι 2.




Με το κουμπί  μπορούμε να κάνουμε μετακίνηση της προβολής των γραφικών. Πατώντας στο κάτω μέρος του ίδιου κουμπιού αναδιπλώνεται ένα μενού από το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε Μεγέθυνση ή Σμίκρυνση.

Στο πεδίο Εισαγωγής γράφουμε $y = 2x$ και πατάμε Enter.

Άλλα παραδείγματα:

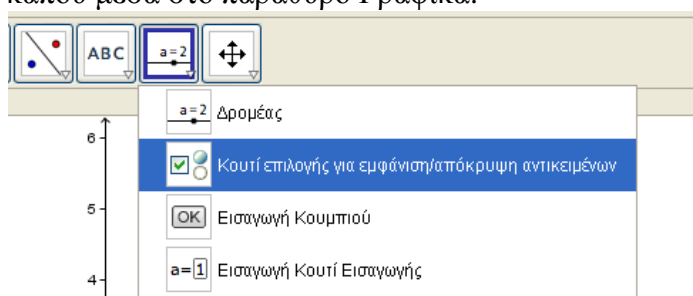
Τύπος συνάρτησης	Εντολή Excel στο κελί B1
$y = 2x$	$2 * A1$
$y = x^2 - 3x$	$A1^2 - 3 * A1$
$y = \frac{x-1}{x+1}$	$(A1-1)/(A1+1)$
$y = \ln x$	$\log(A1)$
$y = e^x$	$\exp(A1)$

Επίλυση συστήματος


- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $y = 2x - 3$ και πατάμε Enter. Εμφανίζεται μια ευθεία η οποία έχει την ετικέτα a. Ταυτόχρονα στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται η ένδειξη a: $y = 2x - 3$.
- Αν πιάσουμε την ευθεία μπορούμε να την μετακινήσουμε παράλληλα. Στο παράθυρο της Άλγεβρας αλλάζει η εξίσωση της ευθείας. Κάνοντας Επεξεργασία → Αναίρεση επιστρέφουμε στην αρχική ευθεία.
- Κάνουμε δεξί κλικ πάνω στην ευθεία ή πάνω στην ένδειξη a: $y = 2x - 3$ και επιλέγουμε Ιδιότητες. Στην καρτέλα που ανοίγει στα Βασικά τσεκάρουμε το Σταθερό αντικείμενο. Τώρα δεν είναι δυνατόν να πιάσουμε την ευθεία και να την μετακινήσουμε παράλληλα. Επιπλέον δεν είναι δυνατόν να διαγράψουμε την ευθεία. Από τις Ιδιότητες μπορούμε ακόμη:
 - α) Να αλλάξουμε το όνομα της ευθείας.
 - β) Να αλλάξουμε το χρώμα της ευθείας.
 - γ) Να αλλάξουμε το πάχος της ευθείας και το στυλ της.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $x + 3y = 5$ και πατάμε Enter. Εμφανίζεται μια δεύτερη ευθεία η οποία έχει την ετικέτα b.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε Τομή[a,b] και πατάμε Enter. Εμφανίζεται το σημείο A που είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών και ταυτόχρονα στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται η ένδειξη $A = (2,1)$.
- Ανοίγουμε ένα νέο αρχείο.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $y = x - 1$ και πατάμε Enter. Εμφανίζεται μια ευθεία η οποία έχει την ετικέτα a. Ταυτόχρονα στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται η ένδειξη a: $y = x - 1$.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $f(x) = x^3$ και πατάμε Enter. Εμφανίζεται μια καμπύλη η οποία έχει την ετικέτα f. Ταυτόχρονα στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται η ένδειξη $f(x) = x^3$.
- Πατάμε παρατεταμένα το κουμπί Νέο σημείο  και από το μενού που αναδιπλώνεται επιλέγουμε Τομή δύο αντικειμένων. Κάνουμε κλικ στη συνάρτηση f και στην ευθεία a. Τότε εμφανίζεται το σημείο A ενώ ταυτόχρονα στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται η ένδειξη $A = (-1.32, -2.32)$.
- Μετακινούμε παράλληλα την ευθεία a ώστε η εξίσωσή της να γίνει $y = x$. Τότε εμφανίζονται τρία σημεία τομής $A = (-1, -1)$, $B = (0, 0)$, $\Gamma = (1, 1)$.
- Ανοίγουμε ένα νέο αρχείο.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $x^2 + (y+1)^2 = 4$ και πατάμε Enter και στη συνέχεια γράφουμε $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 29$ και πατάμε Enter. Εμφανίζονται δύο κύκλοι με ετικέτες c, d.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε Τομή[c, d] και πατάμε Enter.
Τα σημεία τομής είναι $(2, -1)$ και $\left(-\frac{18}{41}, \frac{39}{41}\right)$.

Ελάχιστη – μέγιστη απόσταση




- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ και πατάμε Enter και στη συνέχεια γράφουμε $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ και πατάμε Enter. Εμφανίζονται δύο κύκλοι με ετικέτες c, d.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε Κέντρο[c] και πατάμε Enter και στη συνέχεια Κέντρο[d] και πατάμε Enter. Εμφανίζονται τα κέντρα A, B των δύο κύκλων.
- Σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A, B η οποία έχει ετικέτα a.
- Η ευθεία a έχει εξίσωση $-4x+3y=-10$ δηλαδή έχει τη μορφή $ax+by=\gamma$. Με δεξί κλικ πάνω στην ευθεία, Ιδιότητες \rightarrow Άλγεβρα μπορούμε να επιλέξουμε τη μορφή της εξίσωσης να είναι $y=ax+\beta$ ή παραμετρική.
- Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αλλάξουμε τη μορφή της εξίσωσης των κύκλων.
- Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας a με καθέναν από τους κύκλους c, d.
- Αποκρύπτουμε την ευθεία a με δεξί κλικ Δείξε το αντικείμενο.
- Σχεδιάζουμε το τμήμα που δίνει την ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στους δύο κύκλους και του δίνουμε κάποιο χρώμα. Εμφανίζεται η μέτρηση $b=2$.
- Επιλέγουμε το Κουτί επιλογής για εμφάνιση/απόκρυψη αντικειμένων και κάνουμε κλικ κάπου μέσα στο παράθυρο Γραφικά.



Στον Τίτλο γράφουμε Ελάχιστη απόσταση, κάνουμε κλικ πάνω στο $b=2$ και μετά Εφαρμογή.

- Με δεξί κλικ πάνω στο τμήμα της ελάχιστης απόστασης ή πάνω στη μέτρηση $b=2$ πατάμε Ιδιότητες \rightarrow Βασικά. Τσεκάρουμε Δείξε την ετικέτα και δίπλα αντί για Όνομα επιλέγουμε Τιμή.
- Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για το τμήμα της μέγιστης απόστασης των δύο κύκλων.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $y=x+4$.
- Με το κουμπί  σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από το κέντρο B του κύκλου d και είναι κάθετη στην ευθεία $y=x+4$.
- Αφού βρούμε τα κατάλληλα σημεία τομής σχεδιάζουμε το τμήμα της ελάχιστης απόστασης ανάμεσα στον κύκλο d και στην ευθεία $y=x+4$.

Δρομείς

- Επιλέγουμε το κουμπί Δρομέας  και κάνουμε κλικ στην προβολή γραφικών (περιοχή σχεδίασης). Η καρτέλα που ανοίγει προτείνει το όνομα του δρομέα να είναι a , η ελάχιστη τιμή του να είναι -5 , η μέγιστη τιμή του να είναι 5 και η αύξηση να είναι 0.1 . Αν επιθυμούμε μπορούμε να αλλάξουμε κάτι από τα παραπάνω διαφορετικά πατάμε Εφαρμογή. Στην προβολή γραφικών εμφανίζεται ο δρομέας.
- Με δεξί κλικ πάνω στο δρομέα πατάμε Σταθερό αντικείμενο. Επιλέγουμε το κουμπί Μετακίνηση . Αν κάνουμε κλικ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα του δρομέα μπορούμε να τον μετακινήσουμε μέσα στην προβολή γραφικών σε κάποια άκρη. Αν κάνουμε κλικ πάνω στο σημείο του δρομέα μπορούμε να το μετακινήσουμε μεταβάλλοντας έτσι την τιμή του δρομέα.
- Εισάγουμε και έναν δεύτερο δρομέα b .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $y = ax$ και πατάμε Enter. Έτσι εμφανίζεται η ευθεία c .
ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Ανάμεσα στο a και στο x πρέπει να αφήσουμε κενό.
- Αν μεταβάλλουμε την τιμή του δρομέα βλέπουμε ότι μεταβάλλεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε Κλίση[c].
- Με δεξί κλικ πάνω στο δρομέα a επιλέγουμε Κίνηση Ενεργή.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $y = ax + b$ και πατάμε Enter.
- Αν μεταβάλλουμε τις τιμές των δρομέων μπορούμε να δούμε πως μεταβάλλεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Ανοίγουμε ένα νέο αρχείο.
- Εισάγουμε τρεις δρομείς a , b , c .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $f(x) = ax^2 + bx + c$ και πατάμε Enter.
ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Ανάμεσα στο a και στο x καθώς επίσης ανάμεσα στο b και στο x πρέπει να αφήσουμε κενό.
- Δίνουμε στους δρομείς τις τιμές $a=1$, $b=-5$ και $c=4$.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε Ρίζα[f] και πατάμε Enter. Εμφανίζονται δύο σημεία A και B και στην προβολή της Άλγεβρας εμφανίζονται οι ενδείξεις $A = (1,0)$ και $B = (4,0)$.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $b^2 - 4ac$ και πατάμε Enter. Εμφανίζεται η μέτρηση με την ετικέτα $d = 9$.
- Πατάμε στο κουμπί Εισαγωγή κειμένου . Στο πλαίσιο Επεξεργασία γράφουμε $\Delta =$ και κάνουμε κλικ στη μέτρηση $d = 9$. Κλικ στο Ok.

Συναρτήσεις

Για να εισάγουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$ στο πεδίο εισαγωγής μπορούμε να γράψουμε $y = x^3 - 3x$ ή $f(x) = x^3 - 3x$ ή απλά $x^3 - 3x$ και πατάμε Enter.

Υπάρχουν ορισμένες ιδιαιτερότητες για την εισαγωγή του τύπου μιας συνάρτησης:

- Το πληκτρολόγιο πρέπει να είναι γυρισμένο στα Αγγλικά. Αν το πληκτρολόγιο είναι στα Ελληνικά και γράψουμε $\psi = x^3 - 3x$ τότε βγαίνει μήνυμα σφάλματος μόλις πατήσουμε Enter.
- Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τη πρέπει να πληκτρολογήσουμε στο πεδίο εισαγωγής για να βγει η συνάρτηση στη δεξιά στήλη.

sqrt(x)	\sqrt{x}
lnx	$\ln x$
exp(x)	e^x
sinx	ημx
cosx	συνx
tanx	εφx
cotx	σφx
cbrt(x)	$\sqrt[3]{x}$
abs(x)	$ x $
log(4,x)	$\log_4 x$
ΡίζαN(x,7)	$\sqrt[7]{x}$

Προσοχή: Στο τελευταίο παράδειγμα το ΡίζαN είναι γραμμένο με το πληκτρολόγιο στα Ελληνικά και το x με το πληκτρολόγιο στα Αγγλικά.

- Για να δηλώσουμε τον πολλαπλασιασμό αφήνουμε κενό. Έτσι για να ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x \eta \mu x$ γράφουμε x sinx, όπου ανάμεσα στο x και στο sinx υπάρχει κενό. Αν δεν αφήσουμε κενό τότε μόλις πατήσουμε Enter εμφανίζεται μήνυμα σφάλματος.
- Για να εισάγουμε τις συναρτήσεις $\ln 4x$ ή $\eta \mu 2x$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε παρενθέσεις. Δηλαδή γράφουμε $\ln(4x)$, $\sin(2x)$.
- Η εισαγωγή δυνάμεων γίνεται με το σύμβολο ^ και του κλάσματος με το σύμβολο /.

Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση των παρενθέσεων.

Αν θέλουμε να εισάγουμε τη συνάρτηση $x^{2\eta \mu x}$ πρέπει να πληκτρολογήσουμε $x^{(2\sin x)}$. Αν δεν χρησιμοποιήσουμε παρένθεση και γράψουμε απλά $x^2 \sin x$ τότε το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση $x^2 \eta \mu x$.

Αν θέλουμε να εισάγουμε τη συνάρτηση $\frac{x-1}{x+1}$ πρέπει να πληκτρολογήσουμε $(x-1)/(x+1)$. Αν δεν βάλουμε παρενθέσεις και γράψουμε $x-1/x+1$ τότε το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση $x - \frac{1}{x} + 1$.

Συναρτήσεις με πολλαπλό τύπο

Η εντολή Αν έχει μια σύνταξη της μορφής Αν[α,β,γ]. Το α είναι μια συνθήκη, αν ικανοποιείται η συνθήκη α το αποτέλεσμα είναι β διαφορετικά το αποτέλεσμα είναι γ.

Αν στο πεδίο εισαγωγής γράψουμε Αν[x <= 2, x^2, sinx] το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 2 \\ \eta\mu x, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Στο παράδειγμα αυτό η συνθήκη είναι $x \leq 2$. Αν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη το αποτέλεσμα είναι x^2 διαφορετικά το αποτέλεσμα είναι $\sin x$.

Αν στο πεδίο εισαγωγής γράψουμε Αν[x < -1, x^2, Αν[x <= 1, x, -x^2]] το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < -1 \\ x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Προσοχή στο πληκτρολόγιο. Το Αν είναι γραμμένο στα Ελληνικά και τα υπόλοιπα στα Αγγλικά.

Μια συνάρτηση αφιερωμένη σε αυτούς που πρότειναν το 4^ο Θέμα το 2003.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}(3x^3 + 9x^2 + x + 3), & \text{αν } x < -1 \\ x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{8}(3x^3 - 9x^2 + x - 3), & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Για την παραπάνω συνάρτηση στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε
Αν[x < -1, -1/8(3 x^3+9 x^2+x+3), Αν[x <= 1, x, -1/8(3 x^3-9 x^2+x-3)]]

Η εντολή Αν μπορεί να έχει και μια σύνταξη της μορφής Αν[α,β]. Το α είναι μια συνθήκη, αν ικανοποιείται η συνθήκη α το αποτέλεσμα είναι β διαφορετικά δεν υπάρχει κάποιο αποτέλεσμα.

Η εντολή Αν[x >= 0, exp(x)] δίνει τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ για $x \geq 0$.





Η εντολή Αν[(x < 0) ∨ (x > 1), x^2] δίνει τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Η εντολή Αν[x >= 0, Αν[x > 0, x ln x, 2]] δίνει τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε ΠάνωΑθροισμα[$f, -1, 2, 8$] και πατάμε Enter. Με την εντολή αυτή χωρίζεται το διάστημα $[-1, 2]$ σε 8 διαστήματα ίσου πλάτους δ . Στη συνέχεια σε κάθε διάστημα υπολογίζεται η μέγιστη τιμή M_i της συνάρτησης $i = 1, 2, \dots, 8$. Τέλος υπολογίζεται η παράσταση $M_1 \cdot \delta + M_2 \cdot \delta + \dots + M_8 \cdot \delta$ και το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός a . Με τη συγκεκριμένη εντολή βρίσκουμε $a = 0.84$.
- Κάνουμε δεξί κλικ πάνω στο $a = 0.84$ και επιλέγουμε Ιδιότητες. Στην καρτέλα Βασικά και στο πεδίο Ορισμός αλλάζουμε το 8 σε 20 και κλείνουμε το παράθυρο. Το διάστημα $[-1, 2]$ χωρίστηκε σε 20 διαστήματα ίσου πλάτους και η νέα τιμή είναι $a = -0.13$.
- Για 100 διαστήματα είναι $a = -0.63$ και για 1000 διαστήματα είναι $a = -0.74$.
- Μαρκάρουμε με αριστερό κλικ την τιμή $a = -0.74$ και πατάμε Delete.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε ΚάτωΑθροισμα[$f, -1, 2, 8$] και πατάμε Enter. Με την εντολή αυτή χωρίζεται το διάστημα $[-1, 2]$ σε 8 διαστήματα ίσου πλάτους δ . Στη συνέχεια σε κάθε διάστημα υπολογίζεται η ελάχιστη τιμή m_i της συνάρτησης $i = 1, 2, \dots, 8$. Τέλος υπολογίζεται η παράσταση $m_1 \cdot \delta + m_2 \cdot \delta + \dots + m_8 \cdot \delta$ και το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός a . Με τη συγκεκριμένη εντολή βρίσκουμε $a = -2.14$.
- Για 20 διαστήματα βρίσκουμε $a = -1.33$, για 100 διαστήματα βρίσκουμε $a = -0.87$ και για 1000 διαστήματα βρίσκουμε $a = -0.76$.
- Μαρκάρουμε με αριστερό κλικ την τιμή $a = -0.76$ και πατάμε Delete.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε Ολοκλήρωμα[$f, -1, 2$] και πατάμε Enter. Υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^2 f(x) dx$ και δίνει την τιμή $a = -0.75$.
- Μπορούμε να ορίσουμε ένα δρομέα με όνομα n , ελάχιστη τιμή 1, μέγιστη τιμή 100 και αύξηση 1.
- Δίνουμε τις εντολές ΠάνωΑθροισμα[$f, -1, 2, n$] και ΚάτωΑθροισμα[$f, -1, 2, n$].
- Καθώς μεταβάλλουμε την τιμή του δρομέα n βλέπουμε πως μεταβάλλεται το σχήμα και η τιμή του a .

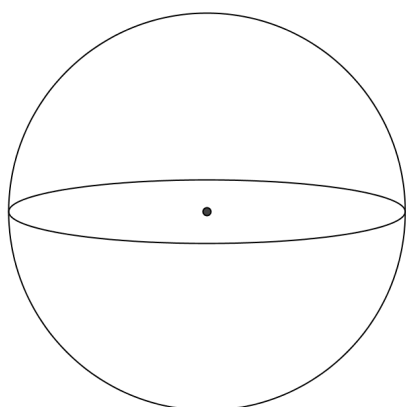
Εφαπτομένη

- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $f(x) = \sin(x) + \ln(x)$ και πατάμε Enter.
- Επιλέγουμε το κουμπί Νέο σημείο  και κάνουμε κλικ πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Εμφανίζεται ένα σημείο A πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Αν μετακινήσουμε το σημείο A παρατηρούμε ότι παραμένει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Πατάμε παρατεταμένα το κουμπί Κάθετη γραμμή  και από το μενού που αναδιπλώνεται επιλέγουμε Εφαπτομένες. Κάνουμε κλικ στο σημείο A και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Ανοίγουμε ένα νέο αρχείο.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $f(x) = 0.1(x+3)(x-1)(x-5)$ και πατάμε Enter.
- Τοποθετούμε δύο σημεία A, B στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Σχεδιάζουμε την εφαπτομένη στο σημείο A.
- Επιλέγουμε το κουμπί Ευθεία που περνά από δύο σημεία  και κάνουμε κλικ στα σημεία A, B.
- Κάνουμε δεξί κλικ πάνω στην εφαπτομένη και επιλέγουμε Ιδιότητες. Στο Χρώμα επιλέγουμε μια απόχρωση του κόκκινου. Στο Στυλ στη Λεπτή γραμμή επιλέγουμε το 5. Στο Προχωρημένες στον όρο για την εμφάνιση του αντικειμένου γράφουμε $A = B$.
- Σχεδιάζουμε μια δεύτερη εφαπτομένη στο σημείο A. Κάνουμε δεξί κλικ πάνω στην εφαπτομένη και επιλέγουμε Ιδιότητες. Στο Στυλ γραμμής επιλέγουμε μια διακεκομμένη γραμμή και όρο εμφάνισης $A \neq B$.
- Μετακινούμε το σημείο B προς το σημείο A μέχρι να ταυτιστεί με το σημείο A.
- Ανοίγουμε ένα νέο αρχείο.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε Συνάρτηση[$0.2x^3 - 2x, -3, 4$] και πατάμε Enter. Σχεδιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0.2x^3 - 2x$ για $x \in [-3, 4]$.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(-3, f(-3))$ και πατάμε Enter. Εμφανίζεται ένα σημείο A.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(4, f(4))$ και πατάμε Enter. Εμφανίζεται ένα σημείο B.
- Τοποθετούμε ένα σημείο C στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και σχεδιάζουμε την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.
- Πατάμε παρατεταμένα το κουμπί Γωνία  και από το μενού που αναδιπλώνεται επιλέγουμε Κλίση. Κάνουμε κλικ πάνω στην εφαπτομένη. Εμφανίζεται η τιμή της κλίσης m. Κάνουμε δεξί κλικ πάνω στο m και επιλέγουμε Δείξε το αντικείμενο.
- Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB και βρίσκουμε την κλίση του.
- Μετακινούμε το σημείο C ώστε οι κλίσεις της εφαπτομένης και του AB να είναι ίσες.

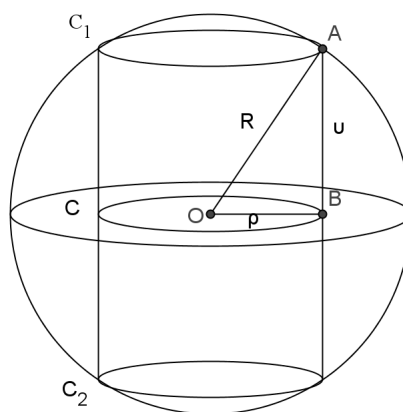
Κύλινδρος εγγεγραμμένος σε σφαίρα

Το μαθηματικό υπόβαθρο της κατασκευής.

Στο σχήμα 1 φαίνεται ένας κύκλος $x^2 + y^2 = R^2$ και μια έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης συμπίπτει με τη διάμετρο του κύκλου, άρα $a = R$ και ο μικρός άξονας είναι $b = \kappa R$ με $0 < \kappa < 1$. Στο συγκεκριμένο σχήμα είναι $\kappa = 0,1$ άρα $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{(0,1R)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 100y^2 = R^2$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η τομή της σφαίρας και του κυλίνδρου είναι δύο κύκλοι C_1, C_2 (σχήμα 2). Έστω C η προβολή των C_1, C_2 πάνω στο xy -επίπεδο. Έστω ότι O είναι το κέντρο της σφαίρας, A ένα σημείο του κύκλου C_1 , B η προβολή του A πάνω στο xy -επίπεδο, ρ η ακτίνα του κύκλου C και $u = AB$. Τότε $u = \sqrt{R^2 - \rho^2}$.

Σχεδιάζουμε τον κύκλο C ως έλλειψη με εξίσωση $x^2 + 100y^2 = \rho^2$ (είναι όμοια με την έλλειψη $x^2 + 100y^2 = R^2$). Σχεδιάζουμε τους κύκλους C_1, C_2 με παράλληλη μετατόπιση: $x^2 + 100(y+u)^2 = \rho^2$ και $x^2 + 100(y-u)^2 = \rho^2$.

- Εισάγουμε δρομέα με όνομα R , τιμές από 0 μέχρι 5 και αύξηση 0.1
- Εισάγουμε δρομέα με όνομα λ , τιμές από 0 μέχρι 1 και αύξηση 0.01. (Με δεξί κλικ πάνω στο δρομέα μπαίνουμε Ιδιότητες \rightarrow Βασικά και δίπλα στο Δείξε την ετικέτα επιλέγουμε Όνομα.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\rho = \lambda R$ και πατάμε Enter. (Πρέπει να αφήσουμε κενό ανάμεσα στα λ και R).
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $x^2 + y^2 = R^2$ και πατάμε Enter.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $x^2 + 100y^2 = R^2$ και πατάμε Enter.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $u = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ και πατάμε Enter.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε (ρ, u) και πατάμε Enter.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(\rho, -u)$ και πατάμε Enter.

- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(-ρ, υ)$ και πατάμε Enter.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(-ρ, -υ)$ και πατάμε Enter.
- Σχεδιάζουμε το πολύγωνο ΑΒΔΓ και αποκρύπτουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $x^2 + 100(y + υ)^2 = ρ^2$ και πατάμε Enter.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $x^2 + 100(y - υ)^2 = ρ^2$ και πατάμε Enter.
- Στις δύο τελευταίες ελλείψεις με δεξί κλικ μπαίνουμε Ιδιότητες → Χρώμα και στο Αδιαφάνεια βάζουμε 50.

Ο όγκος της σφαίρας ως συνάρτηση της ακτίνας $ρ$.

Το ύψος του κυλίνδρου είναι $h = 2υ$ και ο όγκος του $V = πρ^2h = 2πρ^2\sqrt{R^2 - ρ^2}$.

Έτσι ο όγκος του κυλίνδρου είναι συνάρτηση της ακτίνας $ρ$ με τύπο $V(ρ) = 2πρ^2\sqrt{R^2 - ρ^2}$ και πεδίο ορισμού $ρ \in [0, R]$.

Είναι $V'(ρ) = 4πρ\sqrt{R^2 - ρ^2} - \frac{2πρ^3}{\sqrt{R^2 - ρ^2}}$ και $V'(ρ) = 0 \Leftrightarrow ρ = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$ρ$	0	$R\sqrt{\frac{2}{3}}$	R
$V'(ρ)$		+	-
$V(ρ)$		↗	↘

Η μέγιστη τιμή του όγκου είναι $V\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4π}{3\sqrt{3}}R^3$.

Μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση του όγκου V ως συνάρτηση της ακτίνας $ρ$. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να εισάγουμε το σημείο $(ρ, V)$ και σχεδιάζουμε τον γεωμετρικό του τόπο. Όμως υπάρχει ένα πρόβλημα. Οι τιμές του όγκου είναι πολύ μεγάλες οπότε η γραφική παράσταση βγαίνει έξω από τα πλαίσια του παραθύρου. Λύνουμε αυτό το πρόβλημα με αλλαγή κλίμακας. Έτσι θα

μπορούσαμε αντί για το σημείο $(ρ, V)$ να εισάγουμε το σημείο $\left(ρ, \frac{V}{20}\right)$ και

σχεδιάζουμε τον γεωμετρικό του τόπο. Η γραφική παράσταση έχει τώρα φυσιολογικές διαστάσεις όμως υπάρχει ακόμη ένα μικρό πρόβλημα. Η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω στη σφαίρα. Λύνουμε αυτό το πρόβλημα με μετατόπιση της γραφικής παράστασης προς τα δεξιά. Έτσι αντί για το σημείο $\left(ρ, \frac{V}{20}\right)$ εισάγουμε

τελικά το σημείο $\left(ρ + 6, \frac{V}{20}\right)$ και σχεδιάζουμε τον γεωμετρικό του τόπο.

- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $V = 2πρ^2υ$ και πατάμε Enter.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\left(ρ + 6, \frac{V}{20}\right)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ε.

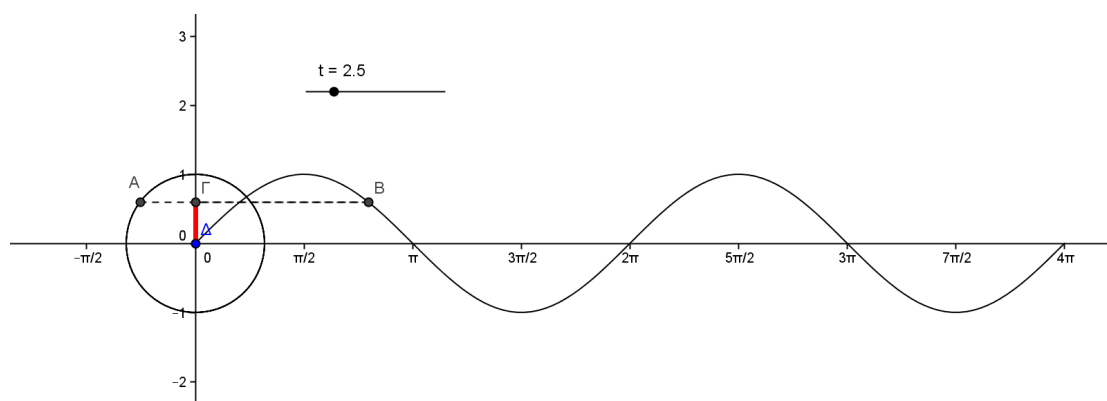
- Ενεργοποιούμε το κουμπί που σχεδιάζει γεωμετρικό τόπο και κάνουμε διαδοχικά κλικ στο σημείο E και στο σημείο του δρομέα λ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\pi}{30\sqrt{3}} R^3 \right)$ και πατάμε Enter.

Δημιουργείται το σημείο Z.

- Ενεργοποιούμε το κουμπί που σχεδιάζει γεωμετρικό τόπο και κάνουμε διαδοχικά κλικ στο σημείο Z και στο σημείο του δρομέα R.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε (6,0) και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο H.
- Ενεργοποιούμε το κουμπί που σχεδιάζει διάνυσμα και σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα πάνω στον άξονα $x'x$ με αρχή το σημείο H και πέρας το 12 (περίπου).
- Σχεδιάζουμε ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$ στο σημείο H.
- Σχεδιάζουμε διάνυσμα πάνω στην ευθεία με αρχή το σημείο H, προς τα πάνω και μήκος περίπου 6.
- Αποκρύπτουμε τους άξονες, την κάθετη ευθεία και τα σημεία στα άκρα των διανυσμάτων.

Γραφική παράσταση ημιτόνου


- Εισάγουμε δρομέα με όνομα t , τιμές από 0 μέχρι 4π και αύξηση 0.1. Βάζουμε το δρομέα στην τιμή 2.5
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(\cos(t), \sin(t))$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο A.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(t, \sin(t))$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο B.
- Ενεργοποιούμε το κουμπί που σχεδιάζει γεωμετρικό τόπο και κάνουμε διαδοχικά κλικ στο σημείο A και στο σημείο του δρομέα t .
- Ενεργοποιούμε το κουμπί που σχεδιάζει γεωμετρικό τόπο και κάνουμε διαδοχικά κλικ στο σημείο B και στο σημείο του δρομέα t .
- Σχεδιάζουμε την ευθεία AB, βρίσκουμε το σημείο τομής Γ με τον άξονα $y'y$ και αποκρύπτουμε την ευθεία AB.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(0, 0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Δ.
- Σχεδιάζουμε το τμήμα ΓΔ και το κάνουμε έντονο και κόκκινο.
- Σχεδιάζουμε τα τμήματα AB και ΒΓ και τα κάνουμε διακεκομμένα.
- Επιλογές → Προχωρημένες. Στο παράθυρο που ανοίγει επιλέγουμε το δεύτερο κουμπί από αριστερά (Ιδιότητες – Γραφικά), επιλέγουμε Άξονας X και στην Απόσταση τσεκάρουμε πάνω στο τετράγωνο και βάζουμε $\pi/2$ αντί για 1.
- Μπορούμε να δώσουμε κίνηση στο δρομέα. Με δεξί κλικ πάνω του πατάμε Κίνηση Ενεργή.
- Μπορούμε να αλλάξουμε τα σημεία A $(\cos(t), \sin(t))$, B $(t, \sin(t))$ σε
A $(\cos(2t), \sin(2t))$, B $(t, \sin(2t))$ ή
A $(2\cos(t), 2\sin(t))$, B $(t, 2\sin(t))$



Επιμεριστική ιδιότητα

- Εισάγουμε δρομέα με όνομα a (στα ελληνικά), τιμές από 0 μέχρι 5 και αύξηση 0.1.
- Εισάγουμε δρομέα με όνομα β (στα ελληνικά), τιμές από 0 μέχρι 5 και αύξηση 0.1.
- Εισάγουμε δρομέα με όνομα γ (στα ελληνικά), τιμές από 0 μέχρι 5 και αύξηση 0.1.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $y=1$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται μια ευθεία a .
- Τοποθετούμε ένα σημείο A πάνω στην ευθεία a . (Με τετμημένη κοντά στο 1).
- (πληκτρολόγιο στα ελληνικά) Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $A + (-\beta,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο B .

Το σημείο A τοποθετήθηκε πάνω στην ευθεία a . Αυτό σημαίνει ότι το σημείο A μπορεί να μετακινηθεί μόνο κατά μήκος αυτής της ευθείας. Το σημείο B ορίστηκε σε σχέση με το σημείο A . Δηλαδή το σημείο B προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση του σημείου A προς τα αριστερά κατά β .

- Τοποθετούμε ένα σημείο Γ πάνω στην ευθεία a . (Με τετμημένη κοντά στο 6).
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\Gamma + (\gamma,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Δ .
- Αποκρύπτουμε την ευθεία a .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $A + (0,\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο E .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $B + (0,\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Z .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\Gamma + (0,\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο H .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\Delta + (0,\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Θ .
- Με το εργαλείο που σχεδιάζει πολύγωνα  σχεδιάζουμε τα ορθογώνια $ABZE$ και $\Gamma\Delta\Theta H$ και αποκρύπτουμε τα σημεία $A, B, \Delta, E, Z, H, \Theta$. (Αφήνουμε μόνο το Γ).
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $B + (0,-2)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο I .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $I + (\beta+\gamma,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο K .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $I + (0,-\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Λ .
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $K + (0,-\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο M .
- Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο $IKM\Lambda$ και αποκρύπτουμε τα σημεία I, K, M, Λ .
- Αποκρύπτουμε τους άξονες.

Με τους δρομείς μπορούμε να αλλάζουμε τις διαστάσεις των ορθογωνίων. Ακόμη μπορούμε να μετακινήσουμε το σημείο Γ ώστε τα δύο ορθογώνια στο πάνω μέρος να εφάπτονται.

- Πατάμε το κουμπί Εισαγωγή κειμένου και κάνουμε κλικ πάνω στην περιοχή σχεδίασης. Στο πλαίσιο Επεξεργασία πληκτρολογούμε $E_1 = a \cdot \beta =$ και κάνουμε κλικ στο παράθυρο της Άλγεβρας πάνω στο πολύγ1. Πατάμε OK.

Δημιουργήθηκε ένα πλαίσιο κειμένου που έχει ένα σταθερό μέρος και ένα μεταβλητό μέρος (το αριθμητικό) που αλλάζει καθώς αλλάζουμε τις τιμές των δρομέων.

- Πατάμε το κουμπί Εισαγωγή κειμένου. Στο πλαίσιο Επεξεργασία πληκτρολογούμε $E_2 = a \cdot \gamma =$ και κάνουμε κλικ στο παράθυρο της Άλγεβρας πάνω στο πολύγ2.
- Πατάμε το κουμπί Εισαγωγή κειμένου. Στο πλαίσιο Επεξεργασία πληκτρολογούμε $E = a \cdot (\beta + \gamma) =$ και κάνουμε κλικ στο παράθυρο της Άλγεβρας πάνω στο πολύγ3
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε πολύγ1 + πολύγ2 και πατάμε Enter. Δημιουργείται ο αριθμός b. (Εμφανίζεται μόνο στο παράθυρο της Άλγεβρας).
- Πατάμε το κουμπί Εισαγωγή κειμένου. Στο πλαίσιο Επεξεργασία πληκτρολογούμε
- $E_1 + E_2 =$ και κάνουμε κλικ στο παράθυρο της Άλγεβρας πάνω στο b.

Διαπιστώνουμε ότι η τιμή του E είναι ίση με την τιμή του $E_1 + E_2$

- Εισάγουμε δρομέα με όνομα n, τιμές από 0 μέχρι 2+a και αύξηση 0.1.
- Αλλάζουμε τον ορισμό του σημείου I από $B + (0, -2)$ σε $B + (0, -2+n)$. Για να γίνει αυτό κάνουμε διπλό κλικ πάνω στο σημείο I στο παράθυρο της Άλγεβρας. Ανοίγει ένα παράθυρο με τίτλο Επαναπροσδιορισμός.

Μετακινώντας το σημείο Γ βάζουμε τα δύο ορθογώνια στο πάνω μέρος να εφάπτονται. Αν μετακινήσουμε το δρομέα n προς τη μέγιστη τιμή του τότε το ορθογώνιο στο κάτω μέρος ταυτίζεται με τα ορθογώνια στο πάνω μέρος.

Η ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

- Αποκρύπτουμε τους άξονες.
- Εισάγουμε 2 δρομείς με όνομα α και β (στα ελληνικά), τιμές από 0 μέχρι 2 και αύξηση 0.1.
- Εισάγουμε δρομέα με όνομα ν (στα ελληνικά), τιμές από 0 μέχρι 3 και αύξηση 0.1. Βάζουμε το δρομέα στην τιμή 3.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(0,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο A.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(\beta,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο B.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(\beta,-\beta)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Γ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(0,-\beta)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Δ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(0,\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο E.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε (β,α) και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Z.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(-\alpha,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Η.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(-\alpha,\alpha)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Θ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $(-\alpha,-\beta)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ι.
- Σχεδιάζουμε το πολύγωνο ΓΙΘΖ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $A+(\nu,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Κ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $B+(\nu,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Λ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\Gamma+(\nu,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Μ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\Delta+(\nu,0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ν.
- Σχεδιάζουμε το πολύγωνο ΚΛΜΝ και αποκρύπτουμε τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $A+(0,\nu)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ξ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $B+(0,\nu)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ο.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $E+(0,\nu)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Π.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $Z+(0,\nu)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ρ.
- Σχεδιάζουμε το πολύγωνο ΞΟΠΡ και αποκρύπτουμε τα σημεία Ξ, Ο, Π, Ρ.

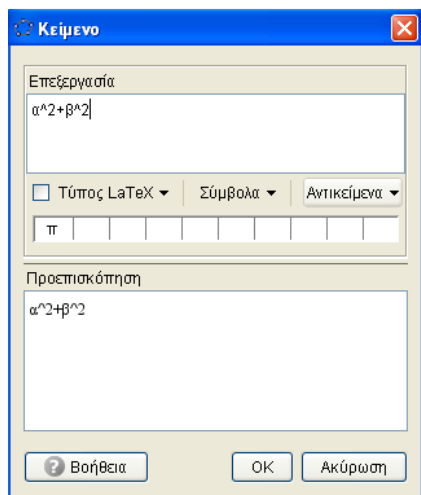
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $A + (-ν, 0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Σ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $H + (-ν, 0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Τ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $E + (-ν, 0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Υ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\Theta + (-ν, 0)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Φ.
- Σχεδιάζουμε το πολύγωνο ΣΤΥΦ και αποκρύπτουμε τα σημεία Σ, Τ, Υ, Φ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $A + (0, -ν)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Χ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $\Delta + (0, -ν)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ψ.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $H + (0, -ν)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο Ω.
- Στο πεδίο εισαγωγής γράφουμε $I + (0, -ν)$ και πατάμε Enter. Δημιουργείται το σημείο A_1 .
- Σχεδιάζουμε το πολύγωνο ΧΨΩ A_1 και αποκρύπτουμε τα σημεία Χ, Ψ, Ω, A_1 .
- Αποκρύπτουμε τα σημεία Α – Ι.

Εντολές LaTeX

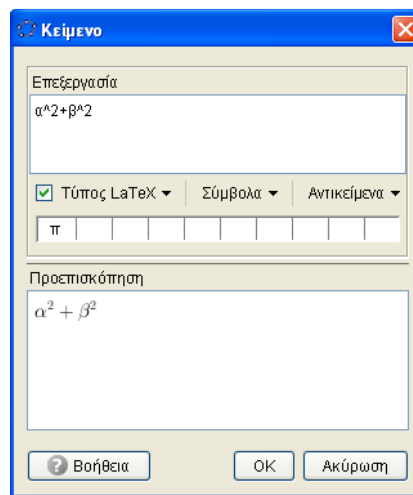
Πατάμε στο κουμπί Εισαγωγή κειμένου. Στο παράθυρο Επεξεργασία γράφουμε ένα κείμενο π.χ. $\alpha^2 + \beta^2$

Στο παράθυρο Προεπισκόπηση φαίνεται πιο θα είναι το τελικό αποτέλεσμα όταν πατήσουμε OK. Με το ίδιο κείμενο στο σχήμα 1 και στο σχήμα 2 δημιουργείται διαφορετικό αποτέλεσμα.

Η διαφορά οφείλεται στη χρήση του Τύπου LaTeX.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Εκθέτης: Γράφουμε x^2 . Αποτέλεσμα x^2 .

Δείκτης: Γράφουμε x_0 . Αποτέλεσμα x_0 .

Με την εντολή $\backslash space$ δημιουργείται κενό ανάμεσα σε 2 σύμβολα.

Με την εντολή $\backslash \alpha\alpha$ αλλάζει γραμμή.

Με την εντολή $\backslash frac\{x\}\{y\}$ δημιουργείται το κλάσμα $\frac{x}{y}$.

Με την εντολή $\backslash frac\{x^2-1\}\{2y+5\}$ δημιουργείται το κλάσμα $\frac{x^2-1}{2y+5}$.

Με την εντολή $\backslash sqrt\{x\}$ δημιουργείται η \sqrt{x} .

Με την εντολή $\backslash log_2 x$ δημιουργείται $\log_2 x$.

Με την εντολή $\backslash lim_{x \to 4} f(x)$ δημιουργείται το όριο $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Με την εντολή $\backslash lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ δημιουργείται το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Με την εντολή $\backslash int_1^{12} f(x) dx$ δημιουργείται το ολοκλήρωμα $\int_1^{12} f(x) dx$.

$x \geq y$	$x \leq y$	$A \cup B$	$A \cap B$	∞	$x \in A$	$x \neq y$
$x \geq y$	$x \leq y$	$A \cup B$	$A \cap B$	∞	$x \in A$	$x \neq y$

Στο παράθυρο του Κειμένου αν κάνουμε κλικ στο βέλος που βρίσκεται δίπλα στο Τύπος LaTeX αναδιπλώνεται ένα μενού. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε πολλές εντολές LaTeX.

