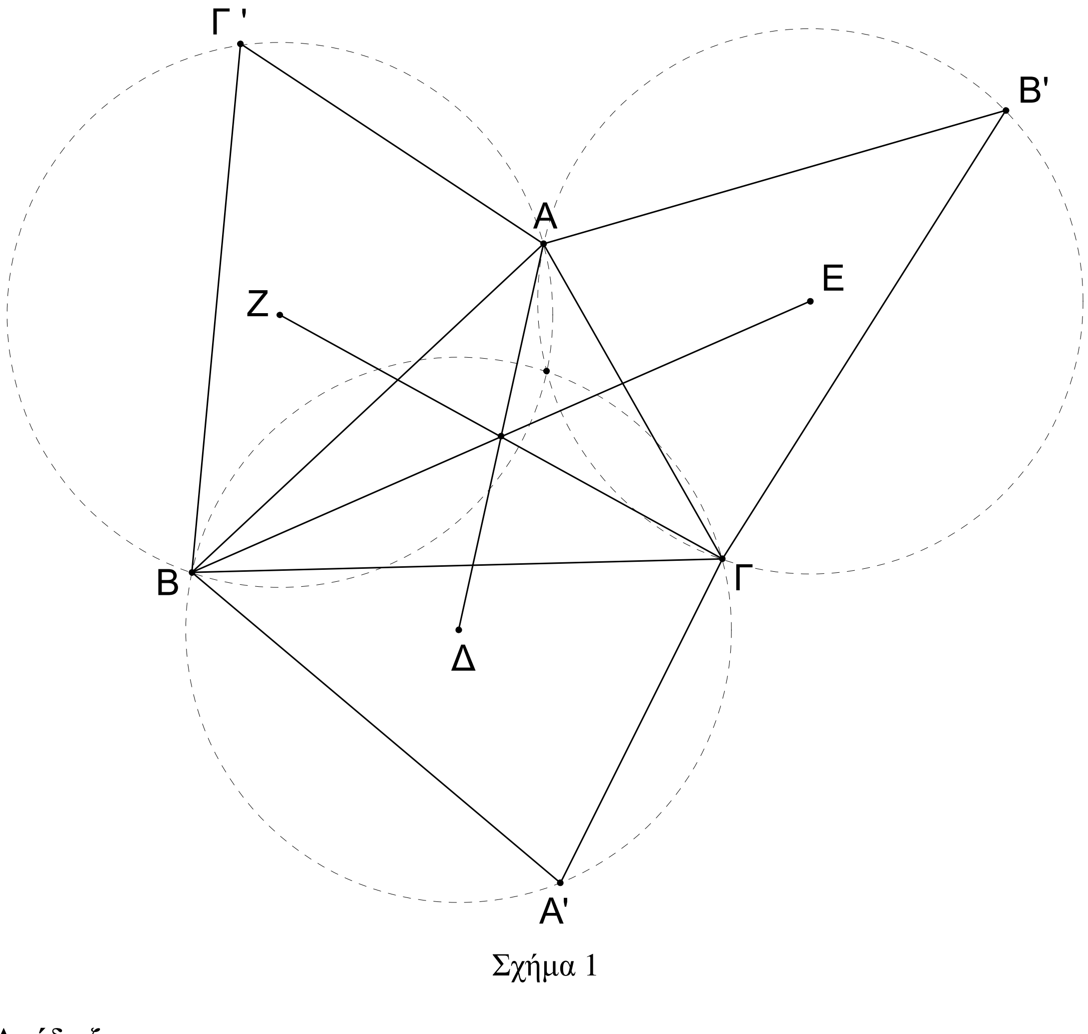
ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω A' το συμμετρικό του Α ως προς τη ΒΓ, B' το συμμετρικό του Β ως προς την ΑΓ και Γ' το συμμετρικό του Γ ως προς την ΑΒ. Έστω ακόμη Δ, Ε, Ζ τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $A'B\Gamma$, $AB'\Gamma$, $AB\Gamma'$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $A'B\Gamma$, $AB'\Gamma$, $AB\Gamma'$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(β) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν.



Σχήμα 1

Απόδειξη

(α) Η AA' είναι κάθετη στη ΒΓ άρα η AA' βρίσκεται πάνω στο ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α. Ομοίως οι BB' και $\Gamma\Gamma'$ βρίσκονται πάνω στα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ από τις κορυφές Β και Γ αντίστοιχα. Άρα οι AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ τέμνονται σε ένα σημείο Η που είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Σχήμα 2)

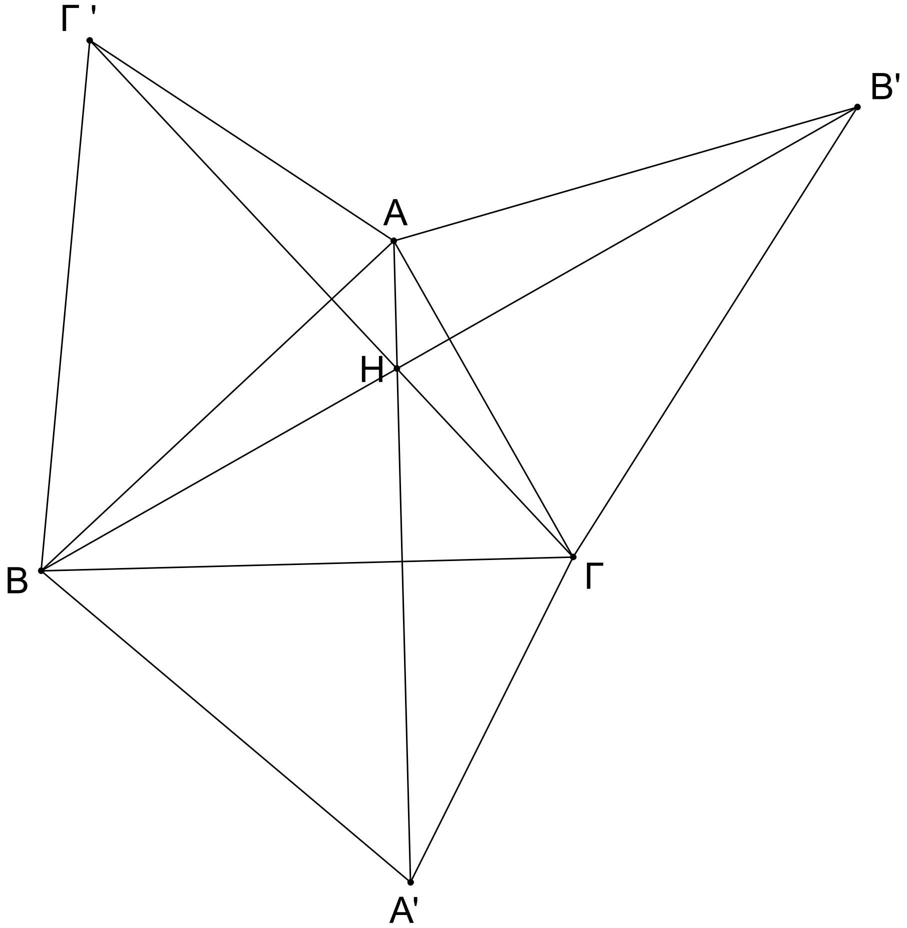
Θα αποδείξουμε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A'B\Gamma$ διέρχεται από το σημείο Η. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $A'BH\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $A'\widehat{H}B = A'\widehat{\Gamma}B$.

Είναι $A'\widehat{H}B = A\widehat{\Gamma}B$ ως συμπληρωματικές της γωνίας $H\widehat{B}\Gamma$.

Ακόμη $A'\widehat{\Gamma}B = A\widehat{\Gamma}B$ γιατί είναι συμμετρικές ως προς τη ΒΓ.

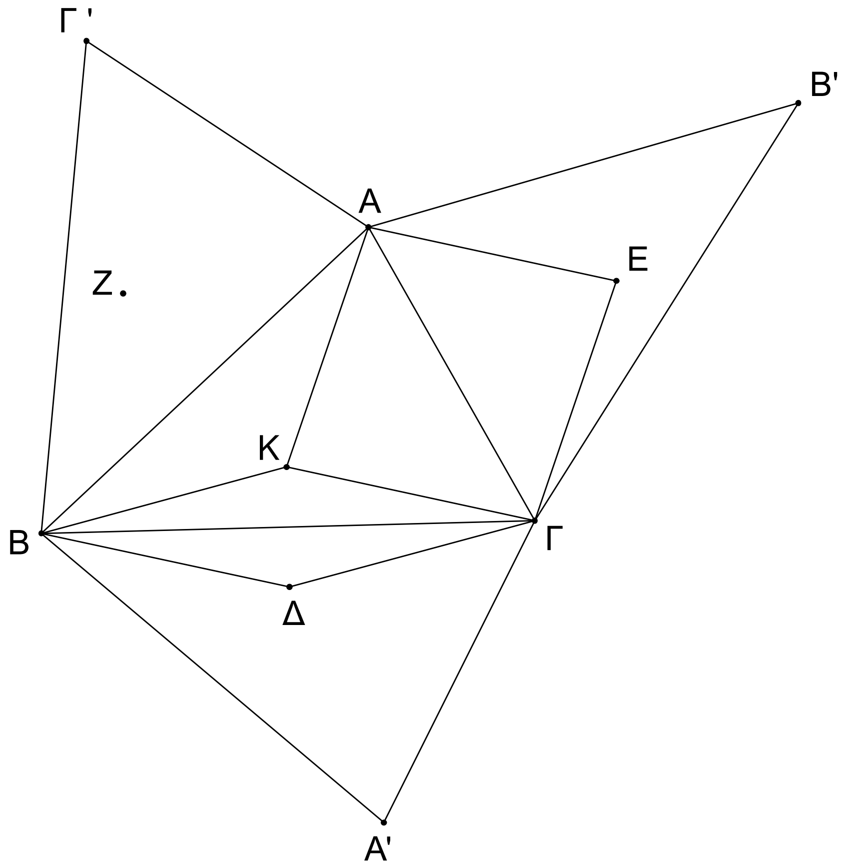
Άρα $A'\widehat{H}B = A'\widehat{\Gamma}B$.
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AB'\Gamma$ και $AB\Gamma'$ διέρχονται από το Η.



Σχήμα 2

(β) Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ συντρέχουν.
Έστω Κ το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Σχήμα 3)
Το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές με $KB = K\Gamma$ αφού το Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Ακόμη τα τρίγωνα ΒΓΚ και ΒΓΔ είναι ίσα γιατί είναι συμμετρικά ως προς τη ΒΓ. Άρα $KB = K\Gamma = \Delta B = \Delta\Gamma$ οπότε το τετράπλευρο ΒΔΓΚ είναι ρόμβος. Τότε $\Delta\widehat{B}\Gamma = B\widehat{\Gamma}K$.
Ομοίως το τετράπλευρο ΑΕΓΚ είναι ρόμβος οπότε $E\widehat{A}\Gamma = A\widehat{\Gamma}K$.
Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ισότητες παίρνουμε

$$\Delta\widehat{B}\Gamma + E\widehat{A}\Gamma = B\widehat{\Gamma}K + A\widehat{\Gamma}K = A\widehat{\Gamma}B. \quad (1)$$



Σχήμα 3

Έστω Μ το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ. (Σχήμα 4)
Θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.
Τα τρίγωνα $A'B\Gamma$, $AB'\Gamma$ είναι ίσα γιατί και τα δύο είναι συμμετρικά του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους είναι ίσοι οπότε $AE = B\Delta$ ως ακτίνες ίσων κύκλων. Έτσι αρκεί να αποδείξουμε ότι $AE//B\Delta$.
Στο τρίγωνο ΑΓΘ είναι

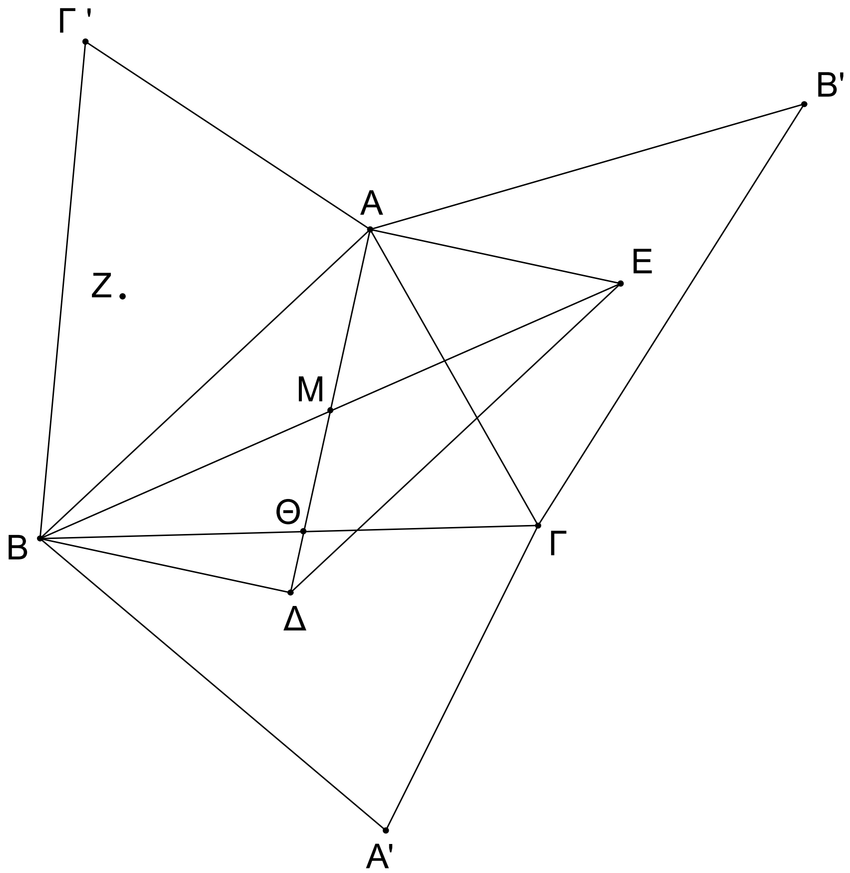
$$180^{\circ} - A\widehat{\Theta}\Gamma = \Theta\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}\Theta \qquad (2)$$

Στο τρίγωνο ΒΔΘ είναι

$$B\widehat{\Delta}\Theta = 180^{\circ} - B\widehat{\Theta}\Delta - \Delta\widehat{B}\Theta = 180^{\circ} - A\widehat{\Theta}\Gamma - \Delta\widehat{B}\Theta \overset{(2)}{=} \Theta\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}\Theta - \Delta\widehat{B}\Theta =$$

$$\overset{(1)}{=} \Theta\widehat{A}\Gamma + E\widehat{A}\Gamma = E\widehat{A}\Theta .$$

Άρα $AE//B\Delta$.
Αφού το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε το Μ είναι το μέσο των ΑΔ, ΒΕ.
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι το ΑΖΔΓ είναι παραλληλόγραμμο οπότε το Μ είναι το μέσο των ΑΔ, ΓΖ.
Έτσι τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο Μ.



Σχήμα 4