ΒΙΟΛΟΓΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΕ ΧΑΟΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ

Νικόλαος Α. Φωτιάδης
Δρ Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου κλάδου ΠΕ 03
E-mail: nikos.fotiades@gmail.com
Website: http://users.sch.gr/nfotiades/

Περίληψη

Τα δυναμικά συστήματα είναι ένας κλάδος της επιστήμης που αναπτύχθηκε για να περιγράψει φυσικά φαινόμενα που εξελίσσονται στο χρόνο. Στο ξεκίνημά τους τα δυναμικά συστήματα ήταν ένας κλάδος της φυσικής, σύντομα όμως οι ιδέες και οι μέθοδοι τους βρήκαν εφαρμογές και σε άλλες επιστήμες όπως στη βιολογία, στη χημεία και στη μηχανική των ρευστών. Συστήματα που εξελίσσονται στο χρόνο μπορεί να παρουσιάζουν κάποια κανονικότητα π.χ. να καταλήγουν σε κάποια σταθερή κατάσταση ή να εμφανίζουν περιοδικότητα, μπορεί όμως να εμφανίζουν και μια εξαιρετικά παράξενη συμπεριφορά που επικράτησε να ονομάζεται χαοτική. Στην εργασία αυτή μελετάμε απλά πληθυσμιακά βιολογικά μοντέλα τα οποία εμφανίζουν χαοτική συμπεριφορά.

Abstract

'Dynamical systems' is a scientific discipline which was developed in order to describe natural phenomena evolving over time. At its beginnings, dynamical systems used to be a branch of physics but soon its ideas and methods found application in other disciplines such as biology, chemistry and fluid mechanics. Systems that develop over time could present with certain regularities, e.g. they may settle down in a steady state or they may exhibit some periodicity, but, they could also develop some unusual behaviors which could be described as chaotic. In this paper we present some simple biological population models displaying chaotic behavior.

Λέξεις κλειδιά: πληθυσμιακά μοντέλα, δυναμικά συστήματα, χάος.

Εισαγωγή

Ο Νεύτωνας σκέφτηκε να περιγράψει την κίνηση ενός συστήματος σωμάτων με εξισώσεις, συγκεκριμένα με διαφορικές εξισώσεις, αφού η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας και η ταχύτητα ο ρυθμός μεταβολής της θέσης. Το παράδειγμα αυτό αποτελεί ένα από τα πρώτα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία για να περιγράψει ένα φυσικό φαινόμενο. Η πρωτοπόρα σκέψη του Νεύτωνα επεκτάθηκε από τις επόμενες γενιές επιστημόνων οι οποίοι χρησιμοποίησαν τις διαφορικές εξισώσεις για να περιγράψουν την εξέλιξη στο χρόνο διαφόρων φυσικών συστημάτων. Δημιουργήθηκε έτσι ένας νέος κλάδος της επιστήμης που ονομάστηκε Δυναμικά Συστήματα. Όταν ο χρόνος είναι συνεχής χρησιμοποιούνται διαφορικές εξισώσεις για την περιγραφή του συστήματος, ενώ αν ο χρόνος θεωρηθεί διακριτός, για παράδειγμα αν η μεταβολή του συστήματος γίνεται ανά μήνα, τότε η περιγραφή του συστήματος γίνεται με εξισώσεις διαφορών.

Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων δεν είναι πάντα εφικτή, ειδικά όταν αυτές δεν είναι γραμμικές. Έτσι, από τη μελέτη των πρώτων παραδειγμάτων σχηματίστηκε η εσφαλμένη άποψη ότι η κίνηση των υπό εξέταση σωμάτων παρουσιάζει μια κανονικότητα. Τα σώματα είτε καταλήγουν σε μια κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας είτε κινούνται για πάντα εκτελώντας περιοδικές κινήσεις (πλανήτες). Σε κάθε περίπτωση η θέση τους είναι προβλέψιμη με την έννοια ότι αν γνωρίζουμε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση ενός σώματος (νόμος) και την κατάστασή του κάποια χρονική στιγμή (αρχικές τιμές) τότε η λύση της διαφορικής εξίσωσης (πρόβλημα αρχικών τιμών) μας δίνει τη δυνατότητα να γνωρίζουμε τη θέση του σώματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο μέλλον.

Σύντομα όμως από τη μελέτη μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων έγινε αντιληπτό ότι υπάρχει και ένα άλλο είδος κίνησης η οποία είναι τόσο ακανόνιστη και εξαιρετικά πολύπλοκη που δεν επιτρέπει την πρόβλεψη μελλοντικών καταστάσεων σε μεγάλο βάθος χρόνου. Αυτό το είδος της συμπεριφοράς ονομάστηκε χαοτικό. Δεν υπάρχει ένας μοναδικός ορισμός που να περιγράφει τη χαοτική συμπεριφορά. Οι διάφοροι ορισμοί που έχουν δοθεί, παρά τις όποιες τεχνικές μικροδιαφορές τους, περιγράφουν μια κατάσταση στην οποία η κίνηση δεν εμφανίζει περιοδικότητα, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες. Ο Poincaré ήταν ο πρώτος που διαπίστωσε την ύπαρξη αυτής της παράξενης κίνησης καθώς μελετούσε το πρόβλημα των τριών σωμάτων. Συγκεκριμένα ο Poincaré μελέτησε θεωρητικά την κίνηση τριών ουράνιων σωμάτων που κινούνται στο ίδιο επίπεδο. Θεώρησε ότι τα δύο από αυτά έχουν πολύ μεγάλη μάζα και το τρίτο είναι πολύ μικρό και διαπίστωσε ότι η κίνηση του μικρότερου σώματος μπορεί να είναι ακανόνιστη [1].

Η μελέτη των δυναμικών συστημάτων αρχικά περιορίζονταν στη μελέτη προβλημάτων της φυσικής, όμως στη συνέχεια επεκτάθηκε σε άλλες επιστήμες μεταξύ των οποίων η βιολογία [2], [3]. Τα άρθρα του R. May [4], [5] δείχνουν ότι απλές εξισώσεις διαφορών, που προκύπτουν από βιολογικά πληθυσμιακά μοντέλα, μπορεί να εμφανίσουν εξαιρετικά πολύπλοκη δυναμική συμπεριφορά.

Το πρόβλημα του Fibonacci

Η μαθηματική μοντελοποίηση του πληθυσμού ενός βιολογικού συστήματος γίνεται με κάποιες παραδοχές. Ένα ιστορικό, αλλά μη ρεαλιστικό, παράδειγμα αποτελεί το παρακάτω πρόβλημα, το οποίο αποδίδεται στον Fibonacci. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα βιολογικό σύστημα το οποίο αποτελείται από κουνέλια. Για το σύστημα αυτό υποθέτουμε ότι

- τα νεογέννητα κουνέλια ενηλικιώνονται σε ένα μήνα
- κάθε ζευγάρι ενήλικων κουνελιών κάθε μήνα φέρνει στη ζωή ένα αρσενικό και ένα θηλυκό κουνέλι
- τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ
- υπάρχει άφθονη τροφή και χώρος για όλα τα κουνέλια
- το σύστημα είναι απομονωμένο, δηλαδή τα κουνέλια δεν απειλούνται από άλλα ζώα ή κυνηγούς
- αρχικά υπάρχουν δύο ενήλικα κουνέλια, ένα αρσενικό και ένα θηλυκό

Η μεταβολή του πλήθος των ζευγαριών των κουνελιών γίνεται ανά μήνα. Έστω x_0 το αρχικό πλήθος των ζευγαριών, x_1 το πλήθος των ζευγαριών τον πρώτο μήνα, x_2 το πλήθος των ζευγαριών το δεύτερο μήνα κλπ. Συμβολίζουμε λοιπόν με x_n το πλήθος των ζευγαριών στο τέλος του $n-$οστού μήνα. Από τα x_n ζευγάρια ορισμένα είναι ενήλικα, τα συμβολίζουμε με ε_n, και τα υπόλοιπα είναι ανήλικα, τα συμβολίζουμε με α_n. Έτσι έχουμε $x_n = \varepsilon_n + \alpha_n$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις το πλήθος των ενήλικων ζευγαριών στο τέλος κάποιου μήνα είναι ίσο με το πλήθος όλων των ζευγαριών του προηγούμενου μήνα αφού τα ενήλικα παραμένουν στη ζωή ενώ τα ανήλικα ενηλικιώνονται. Άρα $\varepsilon_n = x_{n-1}$.

Ακόμη, το πλήθος των ανήλικων ζευγαριών στο τέλος κάποιου μήνα είναι ίσο με το πλήθος των ενήλικων ζευγαριών του προηγούμενου μήνα αφού κάθε ζευγάρι ενήλικων δημιουργεί ένα ζευγάρι ανήλικων. Άρα $\alpha_n = \varepsilon_{n-1}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ισότητα $x_n = \varepsilon_n + \alpha_n$ γίνεται $x_n = x_{n-1} + \varepsilon_{n-1}$. Όμως $\varepsilon_{n-1} = x_{n-2}$, οπότε τελικά έχουμε

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \text{ για } n \geq 2.$$

Το εκθετικό μοντέλο

Το μοντέλο αυτό είναι ένα από τα πρώτα δημογραφικά μοντέλα. Αναπτύχθηκε από τον Malthus το 1798 για τη μελέτη της αύξησης του ανθρώπινου πληθυσμού. Για το πληθυσμιακό μοντέλο κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις

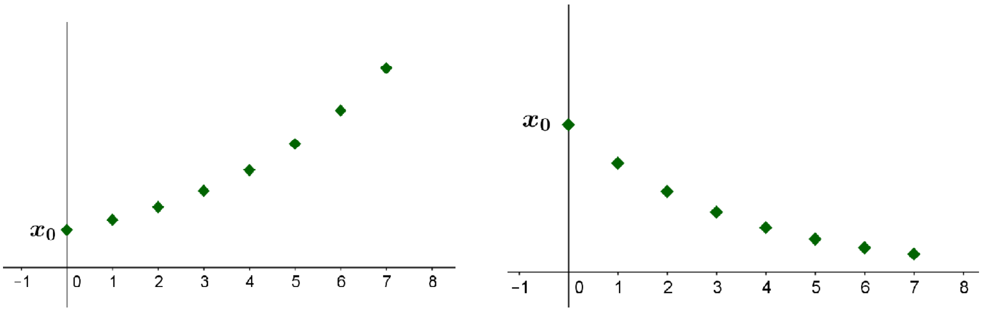
- ο πληθυσμός μεταβάλλεται σε διακριτές χρονικές περιόδους, π.χ. ανά εβδομάδα
- το ποσοστό των γεννήσεων κάθε εβδομάδα είναι σταθερό και ίσο με α
- το ποσοστό των θανάτων κάθε εβδομάδα είναι σταθερό και ίσο με β

Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός αρχικά είναι x_0, ενώ n εβδομάδες μετά ο πληθυσμός είναι x_n. Αφού το ποσοστό των γεννήσεων σε μία εβδομάδα είναι ίσο με α το πλήθος των γεννήσεων από την εβδομάδα n στην εβδομάδα $n+1$ είναι ίσο με αx_n. Ανάλογα, το πλήθος των θανάτων το ίδιο χρονικό διάστημα είναι ίσο με βx_n. Έτσι, στο τέλος της $n+1$ εβδομάδας ο πληθυσμός είναι $x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n$, ή ισοδύναμα,

$$x_{n+1} = \kappa x_n$$

όπου $\kappa = 1 + \alpha - \beta$. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι $x_n = \kappa^n x_0$.

Αν το ποσοστό των γεννήσεων είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των θανάτων τότε $\kappa > 1$ και ο πληθυσμός παρουσιάζει εκθετική αύξηση. Αντίθετα αν το ποσοστό των γεννήσεων είναι μικρότερο από το ποσοστό των θανάτων τότε $\kappa < 1$ και ο πληθυσμός παρουσιάζει εκθετική μείωση (σχήμα 1).



Σχήμα 1

Η λογιστική απεικόνιση

Στο εκθετικό μοντέλο είδαμε ότι η μεταβολή του πληθυσμού είναι ανάλογη του πληθυσμού, $x_{n+1} - x_n = Lx_n$, όπου $L = \alpha - \beta$. Το εκθετικό μοντέλο, στην περίπτωση που είναι $L > 0$, προβλέπει ανεξέλεγκτη αύξηση του πληθυσμού. το οποίο δεν είναι ρεαλιστικό. Θα περιμέναμε ότι σε περίπτωση που ο πληθυσμός ξεπεράσει κάποια κρίσιμη τιμή τότε λόγω έλλειψης της τροφής και του χώρου θα έπρεπε να ακολουθήσει κάποια μείωση του πληθυσμού. Στην προσπάθεια βελτίωσης του εκθετικού μοντέλου σε αυτή την κατεύθυνση ο Verhulst [6] πρότεινε το μοντέλο $x_{n+1} - x_n = Lx_n(M - x_n)$, όπου L, M είναι θετικές σταθερές. Παρατηρούμε ότι όταν η τιμή x_n του πληθυσμού είναι μικρότερη από M το γινόμενο $Lx_n(M - x_n)$ είναι θετικό, οπότε $x_{n+1} > x_n$. Αντίθετα, όταν η τιμή x_n του πληθυσμού είναι μεγαλύτερη από M το γινόμενο $Lx_n(M - x_n)$ είναι αρνητικό, οπότε $x_{n+1} < x_n$.

Για λόγους απλοποίησης αντί για την εξίσωση διαφορών

$$x_{n+1} - x_n = Lx_n(M - x_n) \qquad (1)$$

θα μελετήσουμε τη δυναμική της εξίσωσης

$$x_{n+1} = \kappa x_n(1 - x_n). \qquad (2)$$

Στην πραγματικότητα οι εξισώσεις διαφορών (1) και (2) είναι ισοδύναμες αφού η αντικατάσταση $x_n = \dfrac{1+LM}{L} y_n$ μετασχηματίζει, μετά από πράξεις, την (1) στην $y_{n+1} = \kappa y_n(1 - y_n)$, όπου $\kappa = 1 + LM$.

Η εξίσωση διαφορών (2) είναι γνωστή ως λογιστική εξίσωση και παρουσιάζει μια εξαιρετικά πλούσια δυναμική συμπεριφορά για διάφορες τιμές της σταθεράς κ.

Αν $\kappa \in (0,4]$ και $x_0 \in [0,1]$ τότε $x_1 \in [0,1]$. Πράγματι, από την ισότητα $x_1 = \kappa x_0(1-x_0)$ προκύπτει άμεσα ότι $x_1 \geq 0$. Επιπλέον, από την ανισότητα $x_0(1-x_0) \leq \frac{1}{4}$ που ισχύει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ παίρνουμε $\kappa x_0(1-x_0) \leq \frac{\kappa}{4} \leq 1$. Με μαθηματική επαγωγή προκύπτει ότι $x_n \in [0,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η εξίσωση $x_{n+1} = \kappa x_n(1-x_n)$, $\kappa \in (0,4]$ είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τον πληθυσμό x_n κάποιου είδους τη χρονική στιγμή n. Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο αν η αρχική τιμή x_0 του πληθυσμού βρίσκεται στο διάστημα [0,1] τότε σε κάθε χρονική στιγμή ο πληθυσμός βρίσκεται στο ίδιο διάστημα[1].

Η εξίσωση διαφορών $x_{n+1} = f(x_n)$ είναι ένα διακριτό δυναμικό σύστημα 1ης τάξης. Στο εκθετικό μοντέλο είναι $f(x) = \kappa x$, ενώ στο λογιστικό μοντέλο είναι $f(x) = \kappa x(1-x)$. Ένα διακριτό δυναμικό σύστημα 1ης τάξης είναι μια αναδρομική σχέση που για κάθε αρχική τιμή x_0 ορίζει μια ακολουθία. Η συμπεριφορά της ακολουθίας καθώς $n \to \infty$ είναι το κύριο αντικείμενο της μελέτης ενός διακριτού δυναμικού συστήματος.

Ένα σημείο α λέγεται σταθερό σημείο (ή σημείο ισορροπίας) για το δυναμικό σύστημα $x_{n+1} = f(x_n)$ αν $f(\alpha) = \alpha$. Το εκθετικό μοντέλο με $\kappa \neq 1$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο το 0, ενώ το λογιστικό μοντέλο έχει δύο σταθερά σημεία, το 0 και το $\frac{\kappa-1}{\kappa}$.

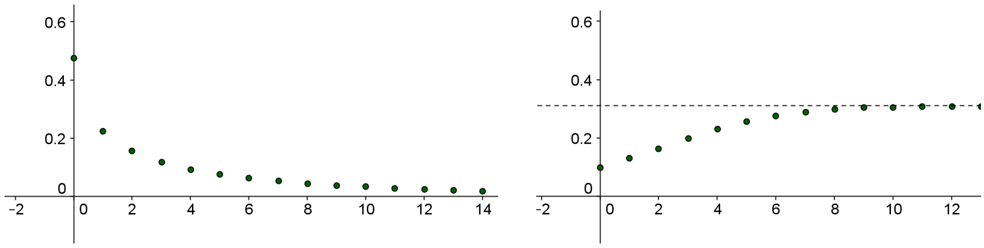
Για τιμές της παραμέτρου κ στο διάστημα $(0,3]$ η δυναμική συμπεριφορά του λογιστικού μοντέλου είναι αρκετά απλή. Συγκεκριμένα:

- Αν $\kappa \in (0,1]$ τότε $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ για κάθε $x_0 \in [0,1]$. Δηλαδή, ο πληθυσμός τείνει να εξαφανιστεί.
- Αν $\kappa \in (1,3]$ τότε $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\kappa-1}{\kappa}$ για κάθε $x_0 \in (0,1)$. Δηλαδή, ο πληθυσμός τείνει σε μια σταθερή τιμή.

Παρατηρούμε ότι κάποιο από τα δύο τα σταθερά σημεία του λογιστικού μοντέλου λειτουργεί ως ελκυστής, δηλαδή, όποια και αν είναι η αρχική τιμή

[1] Ο αριθμός 1 στο διάστημα [0,1] μπορεί να σημαίνει 1 χιλιάδα, 1 εκατομμύριο ή οποιοδήποτε συγκεκριμένο πλήθος που αποτελεί ένα όριο το οποίο δεν μπορεί να ξεπεράσει ο πληθυσμός.

x_0 του πληθυσμού σε βάθος χρόνου ο πληθυσμός είτε θα εξαφανιστεί, είτε θα καταλήξει σε κάποια σταθερή τιμή. (Σχήμα 2)

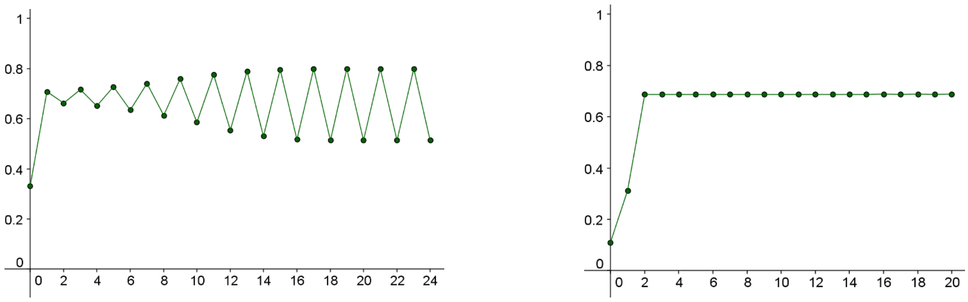


Σχήμα 2

Αν η παράμετρος κ πάρει τιμές λίγο μεγαλύτερες από το 3 τότε εμφανίζονται δύο περιοδικά σημεία

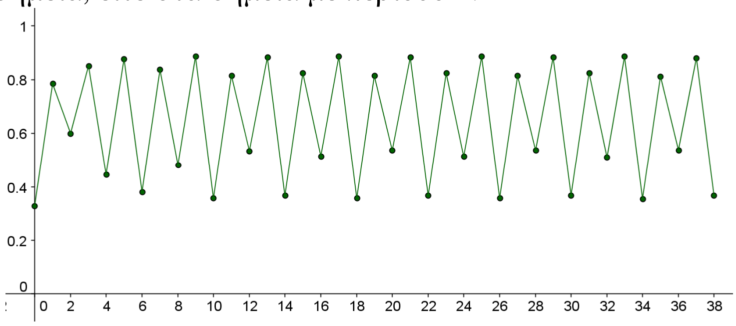
$$\alpha_1 = \frac{\kappa + 1 - \sqrt{\kappa^2 - 2\kappa - 3}}{2\kappa} \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{\kappa + 1 + \sqrt{\kappa^2 - 2\kappa - 3}}{2\kappa}$$

περιόδου 2. Ένα σημείο α λέγεται περιοδικό με περίοδο 2 για το δυναμικό σύστημα $x_{n+1} = f(x_n)$ αν $f(f(\alpha)) = \alpha$ και $f(\alpha) \neq \alpha$. Τα σημεία α_1, α_2 είναι ελκτικά, δηλαδή, για οποιαδήποτε αρχική τιμή x_0 του πληθυσμού, εκτός κάποιων εξαιρέσεων, σε βάθος χρόνου η τιμή του πληθυσμού παρουσιάζει μία ταλάντωση ανάμεσα στις τιμές α_1, α_2. Οι εξαιρέσεις που αναφέρονται πιο πάνω είναι τα σταθερά σημεία ή σημεία που μετά από κάποιο χρόνο καταλήγουν σε κάποιο σταθερό σημείο. Στο σχήμα 3 φαίνεται η εξέλιξη του πληθυσμού για δύο διαφορετικές αρχικές τιμές x_0 και $\kappa = 3,2$. Το σχήμα στα αριστερά είναι αυτό που εμφανίζεται για οποιαδήποτε σχεδόν τιμή του x_0. Όμως για αρχική τιμή $x_0 \simeq 0.1097$ είναι $x_1 = 0,3125$ και $x_2 = 0,6875$ που είναι το σταθερό σημείο.



Σχήμα 3

Καθώς η παράμετρος κ παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές εμφανίζονται 4 περιοδικά ελκτικά σημεία, 8 περιοδικά ελκτικά σημεία κλπ. Είναι το φαινόμενο του διπλασιασμού της περιόδου. Στο σχήμα 4 φαίνεται η τυπική εξέλιξη του πληθυσμού για $\kappa = 3,55$. Σε βάθος χρόνου η τιμή του πληθυσμού κάνει κατά προσέγγιση μια περιοδική ταλάντωση με περίοδο 4. Υπάρχουν όμως κάποιες αρχικές τιμές x_0 που καταλήγουν είτε στα σταθερά σημεία, είτε στα σημεία με περίοδο 2.



Σχήμα 4

Καθώς η τιμή της παραμέτρου κ πλησιάζει την τιμή 4 η δυναμική συμπεριφορά του λογιστικού μοντέλου γίνεται όλο και πιο περίπλοκη, μάλιστα για κάποιες τιμές το μοντέλο γίνεται χαοτικό.

Ορισμός

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$. Το δυναμικό σύστημα $x_{n+1} = f(x_n)$, λέγεται χαοτικό αν

α) έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες,

β) είναι τοπολογικά μεταβατικό,

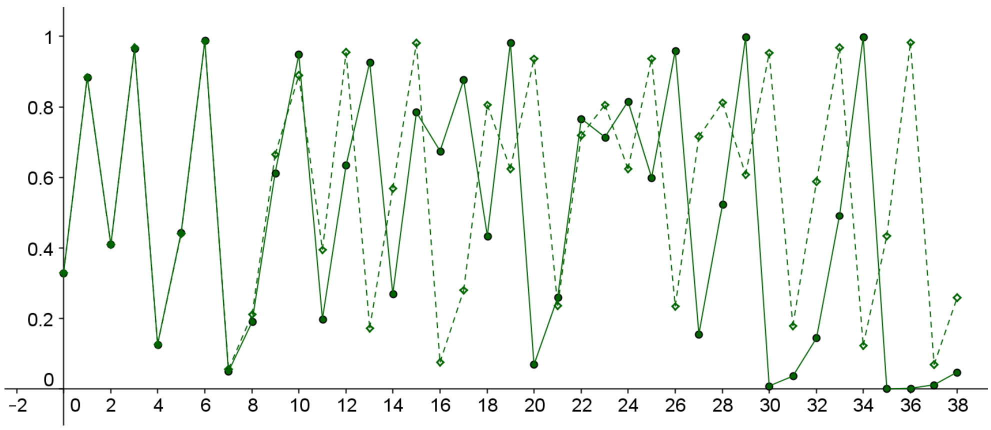
γ) το σύνολο των περιοδικών σημείων του είναι πυκνό στο $[\alpha,\beta]$.

Το δυναμικό σύστημα $x_{n+1} = f(x_n)$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x_0 \in [\alpha,\beta]$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $y_0 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $|x_n - y_n| > \delta$. Δηλαδή για κάθε αρχική τιμή x_0 υπάρχουν σημεία y_0 οσοδήποτε κοντά στο x_0 τέτοια ώστε οι όροι x_n, y_n να απέχουν τουλάχιστον κατά δ για κάποια τιμή του n. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δύο αρχικές τιμές x_0, y_0 μπορεί να διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους όμως οι όροι των ακολουθιών x_n, y_n μπορεί να διαφέρουν σημαντικά μετά από κάποια τιμή του n.

Το δυναμικό σύστημα $x_{n+1} = f(x_n)$ λέγεται τοπολογικά μεταβατικό αν υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ με την ιδιότητα: Για κάθε $y \in [\alpha, \beta]$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Δηλαδή η ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ έχει τιμές σχεδόν παντού στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δεν μπορούμε να χωρίσουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε δύο ή περισσότερα μικρότερα διαστήματα και να μελετήσουμε τη δυναμική του συστήματος σε κάποιο από αυτά ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, αφού δεν μπορούμε να βρούμε κάποιο διάστημα $I \subset [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x) \in I$ για κάθε $x \in I$.

Τα περιοδικά σημεία του δυναμικού συστήματος $x_{n+1} = f(x_n)$ είναι πυκνά στο $[\alpha, \beta]$ αν και μόνο αν για κάθε $y \in [\alpha, \beta]$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_0 \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ τέτοιο ώστε το σημείο x_0 να είναι περιοδικό σημείο της f. Δηλαδή τα περιοδικά σημεία της f βρίσκονται σχεδόν παντού στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Στο σχήμα 5 φαίνεται η εξέλιξη του λογιστικού μοντέλου για $\kappa = 4$ και δύο αρχικές τιμές $x_0 = 0,3298$ και $y_0 = 0,3299$. Μέχρι την τιμή $n = 10$ οι όροι x_n, y_n είναι περίπου ίσοι, όμως για $n > 10$ οι όροι των δύο ακολουθιών δεν φαίνεται να έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους.



Σχήμα 5

Βιβλιογραφία

1. K. Alligood, T. Sauer, J. Yorke, Chaos: An introduction to dynamical systems, Springer Verlag, 1996.
2. F. Brauer, C. Castillo-Chavez, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer Verlag, 2nd edition, 2012.
3. J. Cushing, R. Costantino, B. Dennis, R. Desharnais, S. Henson, Chaos in ecology, Experimental nonlinear dynamics, Academic Press, 2003.
4. R. M. May, Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles and chaos, 186 (1974), 645-647.
5. R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, 261 (1976), 459-467.
6. Verhulst, P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, Corr. Math. et Phys., 10(1838), 113-121.