Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΑ

Νικόλαος Α. Φωτιάδης
Δρ Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου κλάδου ΠΕ 03
E-mail: nikos.fotiades@gmail.com
Website: http://users.sch.gr/nfotiades/

Περίληψη

Τα προβλήματα των γεωμετρικών κατασκευών έχουν μακρά παράδοση στην ιστορία των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία αποδεικνύουμε ότι κάθε κατασκευή που μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη είναι δυνατόν να γίνει μόνο με τον κανόνα, αρκεί να έχει δοθεί ένας κύκλος και το κέντρο του.

Abstract

Geometric construction problems have a long tradition in the history of mathematics. In this paper we show that every construction that can be done with the ruler and the compasses can also be done with the ruler alone provided a circle with its center is given.

Λέξεις κλειδιά: Γεωμετρικές κατασκευές, κατασκευές μόνο με κανόνα

Εισαγωγή

Οι κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση μόνο του κανόνα και του διαβήτη είναι μια παράδοση που έχει τις ρίζες της στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Ο συγκεκριμένος περιορισμός στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων αναφέρεται από ορισμένους συγγραφείς [1] ως "πλατωνικός περιορισμός". Αν πράγματι ο Πλάτωνας έθεσε ρητά τον συγκεκριμένο περιορισμό, είναι κάτι για το οποίο δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι. Δεν υπάρχει καμία σχετική αναφορά σε κείμενο της εποχής του Πλάτωνα. Αρκετούς αιώνες αργότερα, ο Πλούταρχος[1] (1ος αιώνας μ.Χ.) μας πληροφορεί ότι ο Πλάτωνας κατέκρινε τη χρήση άλλων μέσων πέρα από τον κανόνα και το διαβήτη. Όπως είναι γνωστό, οι αρχαίοι Έλληνες

[1] Βίος Μάρκελλου, παρ. 14

είχαν χρησιμοποιήσει και άλλα μέσα για γεωμετρικές κατασκευές που δεν μπορούσαν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη. Το αρχαιότερο σωζόμενο κείμενο που αναφέρεται σε αυτές τις κατασκευές είναι η Μαθηματική Συναγωγή του Πάππου (4ος αιώνας μ.Χ.). Ο Πάππος κάνει μια ταξινόμηση των γεωμετρικών προβλημάτων-κατασκευών με κριτήριο τα μέσα που απαιτούνται για την πραγματοποίηση της κατασκευής σε 3 κατηγορίες:

- Επίπεδα: προβλήματα που επιλύονται με ευθείες και κύκλους.
- Στερεά: προβλήματα που επιλύονται με κωνικές τομές.
- Γραμμικά: προβλήματα που για την επίλυσή τους απαιτούνται πιο πολύπλοκες καμπύλες.

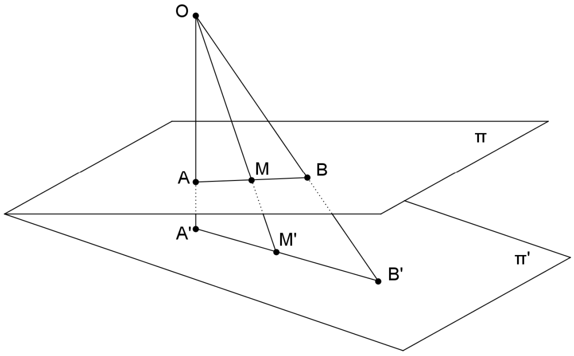
Η λογική της κατασκευής των γεωμετρικών σχημάτων με περιορισμένα μέσα συνεχίστηκε από τους μαθηματικούς και μετά την αρχαιότητα, δίνοντας έτσι νέα αποτελέσματα. Το 1797 ο Ιταλός μαθηματικός Lorenzo Mascheroni απέδειξε ότι κάθε γεωμετρική κατασκευή που μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη είναι δυνατόν να γίνει μόνο με διαβήτη. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είχε δημοσιεύσει και ο Δανός μαθηματικός Georg Mohr το 1672, όμως το έργο του δεν είχε γίνει γνωστό. Το 1759 ο Ελβετός μαθηματικός, φυσικός και φιλόσοφος Johann Heinrich Lambert δημοσίευσε στη Ζυρίχη ένα βιβλίο με τίτλο *Freie Perspektive*, στο οποίο έκανε μια σειρά γεωμετρικών κατασκευών με τη χρήση μόνο του κανόνα. Στον Lambert οφείλεται η ορολογία "γεωμετρία του κανόνα" [2]. Το έργο του Lambert συνέχισαν οι Γάλλοι μαθηματικοί Jean-Victor Poncelet και Charles-Jullien Brianchon, οι οποίοι μετά τη δημοσίευση του βιβλίου του Mascheroni, προσπάθησαν να πραγματοποιήσουν όσο γίνεται περισσότερες κατασκευές μόνο με τον κανόνα. Με τις ανακαλύψεις που έκανε ο Poncelet θεωρείται ένας από τους θεμελιωτές της Προβολικής Γεωμετρίας [3].

Κατασκευές που δεν μπορούν να γίνουν μόνο με τον κανόνα

Με τις προσπάθειες των παραπάνω μαθηματικών έγινε αντιληπτό ότι ο κανόνας δεν είναι το ίδιο ισχυρός με το διαβήτη. Ορισμένες κατασκευές που μπορούν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη δεν είναι δυνατόν να γίνουν με τη χρήση μόνο του κανόνα. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να βρούμε το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με τη χρήση μόνο του κανόνα.

Θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με άτοπο. Έστω ότι δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε ένα επίπεδο π (Σχήμα 1). Θεωρούμε ένα δεύτερο επίπεδο π' που τέμνει το π και ένα σημείο Ο του χώρου που δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο επίπεδα. Το σημείο Ο ορίζει μια προβολική απεικόνιση από το επίπεδο π στο π', αφού σε κάθε σημείο Α του επιπέδου π αντιστοιχεί το μοναδικό σημείο Α' του επιπέδου π' που ανήκει στην ευθεία

ΟΑ. Ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε το μέσο Μ του ΑΒ μόνο με τον κανόνα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία ενεργειών οι οποίες περιλαμβάνουν τη χάραξη ευθειών που διέρχονται από υπάρχοντα σημεία και τον προσδιορισμό νέων σημείων ως τομή δύο ευθειών. Η τελευταία ενέργεια είναι η χάραξη μιας ευθείας που διέρχεται από το μέσο Μ του ΑΒ και δεν ταυτίζεται με την ευθεία ΑΒ. Είναι γνωστό ότι κάθε προβολική απεικόνιση απεικονίζει ευθείες σε ευθείες. Έτσι η ακολουθία των ενεργειών για των προσδιορισμό του μέσου Μ του ΑΒ στο επίπεδο π ορίζει μέσω της προβολικής απεικόνισης μια ακολουθία ενεργειών στο επίπεδο π', με την οποία προσδιορίζεται το σημείο Μ' στο τελευταίο βήμα. Το Μ' όμως δεν είναι το μέσο του Α'Β', αφού τα επίπεδα π και π' δεν είναι παράλληλα. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο, αφού η υποτιθέμενη ακολουθία ενεργειών για τον προσδιορισμό του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος δεν ήταν αποτελεσματική για τον προσδιορισμό του μέσου του τμήματος Α'Β'.



Σχήμα 1

Το θεώρημα του Steiner

Το 1833 ο Ελβετός γεωμέτρης Jakob Steiner δημοσίευσε ένα βιβλίο, στο οποίο μεταξύ των άλλων αποδείκνυε ότι κάθε κατασκευή που μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί μόνο με τον κανόνα αρκεί να έχει δοθεί στο επίπεδο ένας κύκλος και το κέντρο του [4]. Μια γεωμετρική κατασκευή που γίνεται με κανόνα και διαβήτη είναι μια διαδικασία με πεπερασμένο πλήθος βημάτων σε κάθε ένα από τα οποία ένα νέο σημείο προκύπτει ως σημείο τομής:

- Δύο ευθειών
- Μιας ευθείας και ενός κύκλου
- Δύο κύκλων

Στη γεωμετρία του κανόνα δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε κύκλους. Θεωρούμε ότι ο ένας κύκλος έχει οριστεί, αν έχουμε προσδιορίσει δύο σημεία: το κέντρο του και ένα σημείο του κύκλου. Για να αποδείξουμε το θεώρημα Steiner, αρκεί να αποδείξουμε τα παρακάτω δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 1

Δίνονται δύο σημεία Α, Β και μία ευθεία ε. Έστω κ ο κύκλος (Α, ΑΒ). Αν η ευθεία ε και ο κύκλος κ έχουν δύο κοινά σημεία, τότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε τα σημεία τομής τους μόνο με κανόνα, αρκεί να έχει δοθεί στο επίπεδο ένας κύκλος και το κέντρο του.

Θεώρημα 2

Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Έστω κ_1 *ο κύκλος (Α, ΑΒ) και* κ_2 *ο κύκλος (Γ, ΓΔ). Αν οι κύκλοι* κ_1, κ_2 *τέμνονται, τότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε τα σημεία τομής τους μόνο με κανόνα, αρκεί να έχει δοθεί στο επίπεδο ένας κύκλος και το κέντρο του.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη των δύο θεωρημάτων θα παρουσιάσουμε μια σειρά από κατασκευές. Σε κάθε μια από αυτές χρησιμοποιούμε μόνο τον κανόνα και υποθέτουμε ότι έχει δοθεί στο επίπεδο ένας κύκλος και το κέντρο του.

Κατασκευή 1

Δίνονται μια ευθεία ε, ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ευθεία και ένας κύκλος (K,ρ). *Να κατασκευάσετε μόνο με κανόνα την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στην ε.*

<u>1η περίπτωση</u>: Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το μέσο Γ ενός ευθύγραμμου τμήματος ΒΔ της ευθείας ε (Σχήμα 2α). Στην προέκταση του ΒΑ, προς το Α, παίρνουμε ένα σημείο Ε. Βρίσκουμε το σημείο τομής Ζ των ΑΔ και ΓΕ και το σημείο τομής Η των ΔΕ και ΒΖ. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Η είναι παράλληλη στην ε.

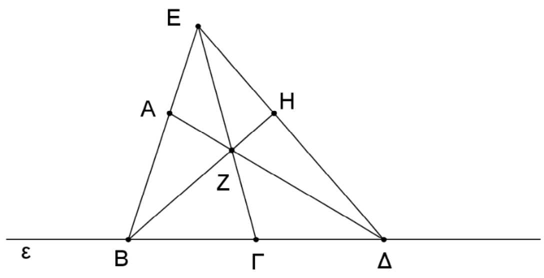
Δικαιολόγηση της κατασκευής. Από το θεώρημα του Ceva προκύπτει

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\Gamma\mathrm{B}}{\Gamma\Delta}\cdot\frac{\mathrm{H}\Delta}{\mathrm{HE}}=1.$$

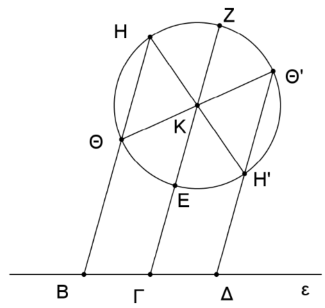
Όμως $\Gamma\mathrm{B} = \Gamma\Delta$, οπότε η παραπάνω ισότητα γίνεται $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{H}\Delta}{\mathrm{HE}} = 1$ ή ισοδύναμα $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{H}\Delta}$.

2η περίπτωση: Υποθέτουμε ότι δεν γνωρίζουμε το μέσο κάποιου ευθύγραμμου τμήματος της ευθείας ε. Επιλέγουμε ένα σημείο Γ της ευθείας ε και βρίσκουμε τα σημεία τομής Ε, Ζ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Κ, Γ με τον κύκλο (K,ρ). Παίρνουμε ένα σημείο Η στον κύκλο (K,ρ), διαφορετικό από τα Ε, Ζ (Σχήμα 2β). Η παράλληλη[2] από το Η προς το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ τέμνει πάλι τον κύκλο στο σημείο Θ και την ευθεία ε στο σημείο Β. Βρίσκουμε τα αντιδιαμετρικά Η' και Θ' των σημείων Η και Θ. Έστω Δ το σημείο τομής των ευθειών Η'Θ' και ε. Τώρα γνωρίζουμε το μέσο Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΒΔ και κάνουμε την κατασκευή της 1ης περίπτωσης.

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Οι παράλληλες ευθείες ΒΗ, ΓΖ και ΔΘ' ορίζουν ίσα τμήματα στην ΗΗ'. Από το θεώρημα του Θαλή ορίζουν ίσα τμήματα στην ευθεία ε.



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

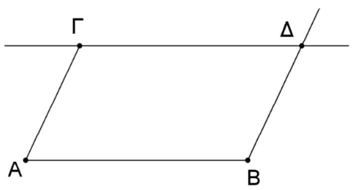
Κατασκευή 2

Δίνονται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ένα σημείο Γ και ένας κύκλος (K,ρ). *Να κατασκευάσετε μόνο με κανόνα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ ώστε τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ να είναι ίσα και παράλληλα.*

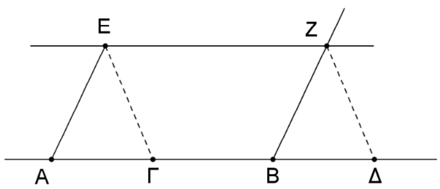
[2] Η χάραξη της παράλληλης γίνεται με την κατασκευή της 1ης περίπτωσης, αφού γνωρίζουμε το μέσο Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ.

1η περίπτωση: Υποθέτουμε ότι το σημείο Γ δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ (Σχήμα 3α). Η παράλληλη από το Γ προς την ΑΒ και η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνονται σε ένα σημείο Δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα και παράλληλα.

2η περίπτωση: Υποθέτουμε ότι το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ (Σχήμα 3β). Επιλέγουμε ένα σημείο Ε που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ. Με την παραπάνω διαδικασία αρχικά μεταφέρουμε παράλληλα το ΑΒ στο ΕΖ και στη συνέχεια μεταφέρουμε το ΕΖ στο ΓΔ.



Σχήμα 3α



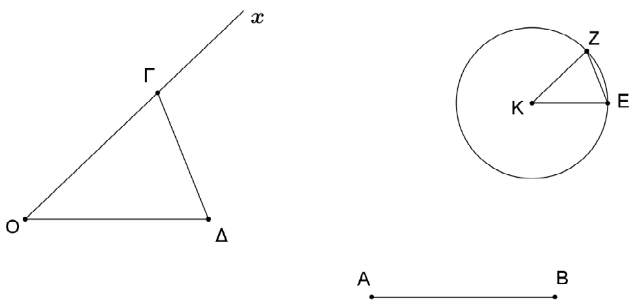
Σχήμα 3β

Κατασκευή 3

Δίνονται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, μια ημιευθεία Ox και ένας κύκλος (K, ρ). *Να κατασκευάσετε μόνο με κανόνα ένα σημείο Γ πάνω στην ημιευθεία Ox ώστε* $AB = O\Gamma$.

Μεταφέρουμε παράλληλα το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στη θέση ΟΔ (Κατασκευή 2). Φέρνουμε τις ακτίνες ΚΕ//ΑΒ και ΚΖ//Ο*x* (Κατασκευή 1). Η παράλληλη από το Δ προς την ΕΖ τέμνει την Ox στο σημείο Γ (Κατασκευή 1).

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Τα τρίγωνα ΟΔΓ, ΚΕΖ είναι όμοια αφού έχουν τις πλευρές τους παράλληλες (Σχήμα 4). Όμως το τρίγωνο ΚΕΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{KE} = \mathrm{KZ}$. Άρα το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{O\Delta} = \mathrm{O\Gamma}$.



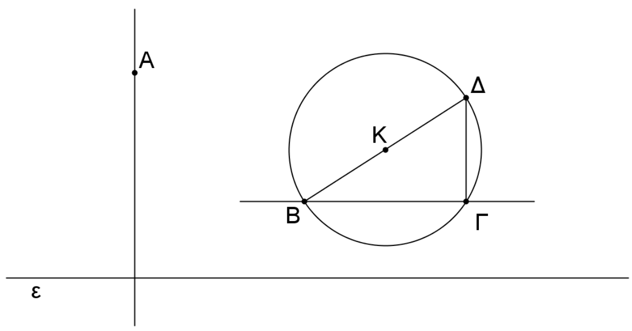
Σχήμα 4

Κατασκευή 4

Δίνονται μια ευθεία ε, ένα σημείο Α και ένας κύκλος (K, ρ). *Να κατασκευάσετε μόνο με κανόνα την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ε.*

Από ένα σημείο Β του κύκλου (Κ,ρ) φέρουμε την παράλληλη στην ευθεία ε (Κατασκευή 1), η οποία τέμνει πάλι τον κύκλο στο σημείο Γ (Σχήμα 5). Βρίσκουμε το αντιδιαμετρικό σημείο Δ του σημείου Β. Από το σημείο Α φέρουμε την παράλληλη στην ΓΔ.

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Η γωνία $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.



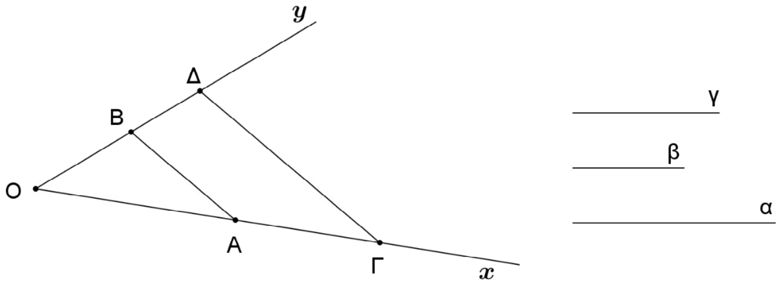
Σχήμα 5

Κατασκευή 5

Δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα με μήκη α, β, γ και ένας κύκλος (K, ρ). *Να κατασκευάσετε μόνο με κανόνα την τέταρτη ανάλογο των τμημάτων, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος δ ώστε να ισχύει* $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$.

Σχεδιάζουμε δύο ημιευθείες Ox, Oy (Σχήμα 6). Πάνω στην Ox κατασκευάζουμε δύο σημεία Α, Γ ώστε $\mathrm{OA} = \alpha$ και $\mathrm{A\Gamma} = \gamma$ και στην Oy κατασκευάζουμε ένα σημείο Β ώστε $\mathrm{OB} = \beta$ (Κατασκευή 3). Η παράλληλη από το σημείο Γ προς την ΑΒ τέμνει την Oy στο σημείο Δ (Κατασκευή 1). Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ έχει μήκος δ.

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Από το θεώρημα Θαλή προκύπτει ότι $\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}}$.

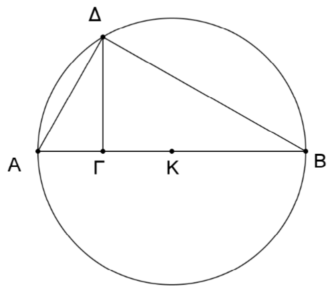


Σχήμα 6

Κατασκευή 6

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη α, β και ένας κύκλος (K, ρ). *Να κατασκευάσετε μόνο με κανόνα τη μέση ανάλογο των τμημάτων, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος γ ώστε να ισχύει* $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\alpha + \beta$ (Κατασκευή 3) και δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\delta_1 = \frac{2\rho}{\alpha + \beta} \cdot \alpha$ και $\delta_2 = \frac{2\rho}{\alpha + \beta} \cdot \beta$ (Κατασκευή 5). Παρατηρούμε ότι $\delta_1 + \delta_2 = 2\rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του δοσμένου κύκλου. Σχεδιάζουμε μια διάμετρο ΑΒ του κύκλου (K, ρ) και πάνω σε αυτή παίρνουμε ένα σημείο Γ ώστε $\text{ΑΓ} = \delta_1$ (Κατασκευή 3) (Σχήμα 7).



Σχήμα 7

Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Γ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ (Κατασκευή 4). Κατασκευάζουμε το ζητούμενο τμήμα με μήκος γ ως την τέταρτη ανάλογο των τμημάτων 2ρ, $\alpha+\beta$, ΓΔ (Κατασκευή 5).

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Για το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ ισχύει

$$\Gamma\Delta = \sqrt{\delta_1\delta_2} = \frac{2\rho}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\beta}\,.$$

Οπότε, $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2\rho}\Gamma\Delta = \sqrt{\alpha\beta}$.

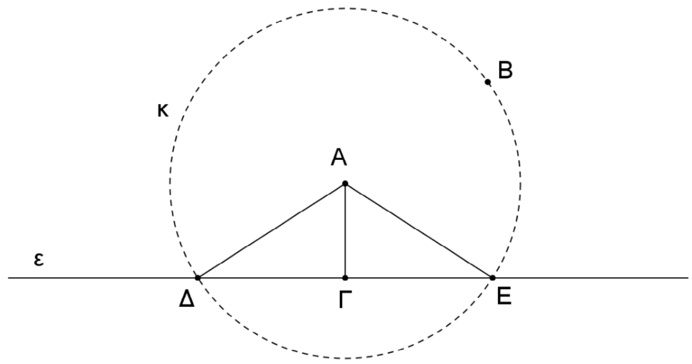
Απόδειξη του Θεωρήματος 1

Από το σημείο Α φέρουμε την κάθετη στην ευθεία ε (Κατασκευή 4) και ονομάζουμε Γ το σημείο τομής τους (Σχήμα 8). Έστω α, β τα μήκη των τμημάτων ΑΒ και ΑΓ. Κατασκευάζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$ (Κατασκευή 3) και ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\sqrt{\alpha^2-\beta^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$ (Κατασκευή 6). Πάνω στην ευθεία ε κατασκευάζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με ΓΔ και ΓΕ με μήκος $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ (Κατασκευή 3). Τα σημεία Δ, Ε είναι τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον κύκλο κ.

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία Δ, Ε ανήκουν στον κύκλο (Α, ΑΒ) είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE} = \alpha$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι

$$\mathrm{A}\Delta = \sqrt{\Gamma\Delta^2 + \mathrm{A}\Gamma^2} = \sqrt{(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2} = \alpha\,.$$

Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι $\mathrm{AE} = \alpha$.



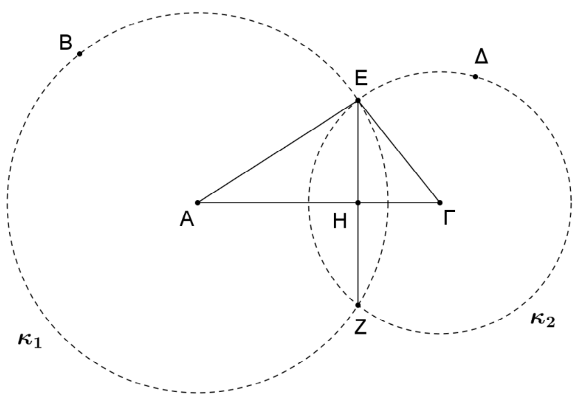
Σχήμα 8

Απόδειξη του Θεωρήματος 2

Έστω α, β, γ τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ. Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη κάθετων πλευρών α, γ (Κατασκευές 3, 4). Η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου έχει μήκος $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$. Κατασκευάζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\delta + \beta$ και $\delta - \beta$ (Κατασκευή 3). Κατασκευάζουμε την τέταρτη ανάλογο των τμημάτων 2γ, $\delta + \beta$, $\delta - \beta$ (Κατασκευή 5) που είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος

$$\mu = \frac{(\delta + \beta)(\delta - \beta)}{2\gamma} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma}.$$

Κατασκευάζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\alpha + \mu$ και $\alpha - \mu$ (Κατασκευή 3) και ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος $\lambda = \sqrt{(\alpha + \mu)(\alpha - \mu)}$ (Κατασκευή 6). Πάνω στην ΑΓ κατασκευάζουμε ένα σημείο Η, ώστε το μήκος του ΑΗ να είναι μ (Κατασκευή 3). Κατασκευάζουμε την κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Η (Κατασκευή 4) και πάνω σε αυτή κατασκευάζουμε σημεία Ε, Ζ, ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΕ, ΗΖ να έχουν μήκος λ (Κατασκευή 3). Τα σημεία Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής των κύκλων κ_1, κ_2 (Σχήμα 9).



Σχήμα 9

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία Ε, Ζ ανήκουν στους κύκλους (Α, ΑΒ) και (Γ, ΓΔ) είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\mathrm{AE} = \mathrm{AZ} = \alpha$ και $\Gamma\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{Z} = \beta$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΕ έχουμε ότι

$$\mathrm{AE} = \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{HE}^2} = \sqrt{\mu^2 + (\alpha^2 - \mu^2)} = \alpha .$$

Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι $\mathrm{AZ} = \alpha$.

Από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε ότι

$$\Gamma\mathrm{E}^2 = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{A}\Gamma^2 - 2\mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{AH} = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} = \beta^2 .$$

Άρα $\Gamma\mathrm{E} = \beta$. Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι $\Gamma\mathrm{Z} = \beta$.

Παρατήρηση: Για να ορίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη $\delta - \beta$ και $\alpha - \mu$ που αναφέρθηκαν στην απόδειξη του θεωρήματος 2 θα πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες $\beta < \delta$ και $\mu < \alpha$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε αυτές τις ανισότητες.

$$\beta < \delta \Leftrightarrow \beta^2 < \delta^2 \Leftrightarrow \beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma < 90^\circ .$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού η γωνία $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ΑΗΕ.

$$\mu < \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} < \alpha \Leftrightarrow |\alpha - \gamma| < \beta .$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού τα α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών του τριγώνου ΑΓΕ.

Βιβλιογραφία

1. Martin George (1998), *Geometric Constructions,* Springer.
2. Dörrie Heinrich (1965), *One Hundred Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications.
3. Coxeter H. S. M. (1949), *The real projective plane*, McGraw-Hill.
4. Jacob Steiner's Geometrical Constructions with a Ruler Given a Fixed Circle with Its Center. Translated from the German edition by M. E. Stark, Scripta Mathematica (1950).