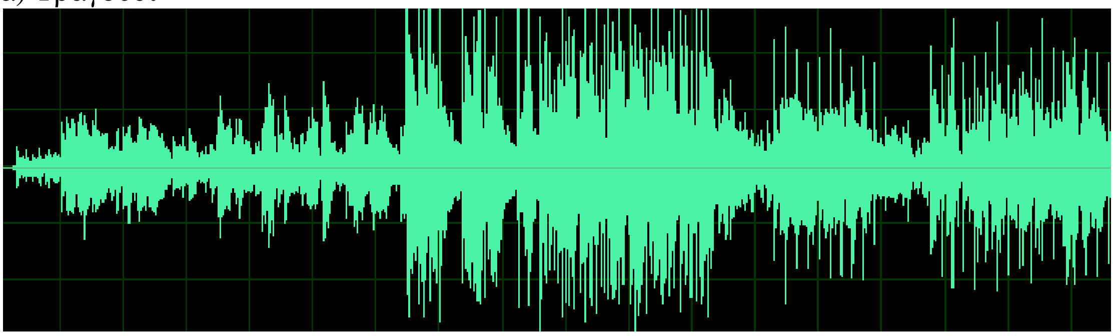
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΚΛΙΜΑΚΑ
ΜΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΑΣ

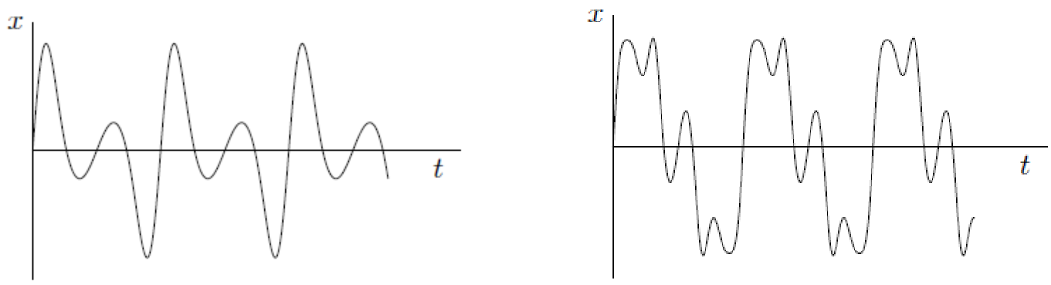
Νίκος Α. Φωτιάδης
Δρ. Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου κλάδου ΠΕ 03

Η αίσθηση της ακοής δημιουργείται στον άνθρωπο όταν διακυμάνσεις του αέρα διεγείρουν τη μεμβράνη του τύμπανου στο αυτί. Αυτές οι διακυμάνσεις προέρχονται από τις δονήσεις κάποιου σώματος (ή κάποιων σωμάτων) που είναι η πηγή του ήχου και καταλήγουν στο αυτί μέσω του αέρα. Ο ήχος μπορεί να είναι ευχάριστος ή κάποιος θόρυβος. Με κατάλληλα όργανα που μετράνε την πίεση του αέρα μπορούμε να σχεδιάσουμε την γραφική αναπαράσταση του ήχου με μια καμπύλη που αναφέρεται συνήθως ως κυματομορφή. Στον οριζόντιο άξονα σημειώνεται ο χρόνος και στον κατακόρυφο η τιμή της πίεσης του αέρα.

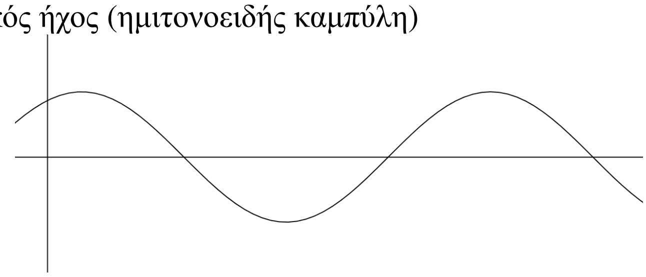
Παραδείγματα
α) Τραγούδι



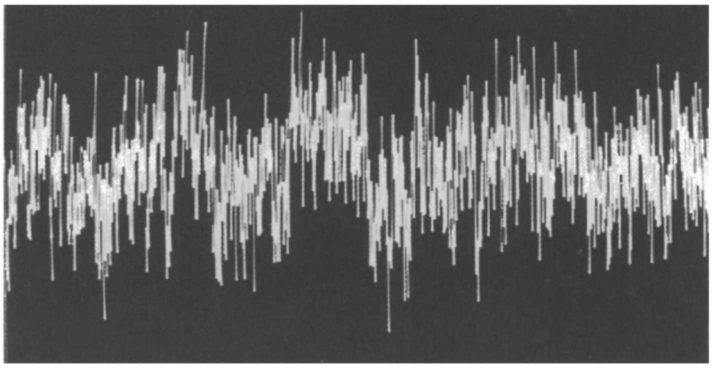
β) Η νότα ΛΑ από δύο διαφορετικά μουσικά όργανα



γ) Απλός αρμονικός ήχος (ημιτονοειδής καμπύλη)



δ) Θόρυβος



Η κυματομορφή ενός ευχάριστου ήχου χαρακτηρίζεται από μια περιοδικότητα ενώ αντίθετα στην κυματομορφή του θορύβου δεν φαίνεται να υπάρχει περιοδικότητα. Στην περίπτωση που το ηχογόνο σώμα είναι ένα διαπασών τότε η κυματομορφή είναι η γραφική παράσταση μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης, ο ήχος όμως είναι εξαιρετικά φτωχός και ελάχιστα ενδιαφέρον.

Υπάρχουν διάφορες περιοδικές συναρτήσεις και οι ημιτονοειδείς αποτελούν μία μόνο κατηγορία. Είναι εύλογο το ερώτημα αν ο ήχος μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά με άλλες συναρτήσεις πέρα από τις ημιτονοειδείς. Παρακάτω δίνεται η θεωρητική εξήγηση γιατί από όλες τις περιοδικές συναρτήσεις μόνο οι ημιτονοειδείς περιγράφουν τον ήχο.

Η διαφορική εξίσωση για την απλή περιοδική κίνηση είναι

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y, \quad \kappa > 0.$$

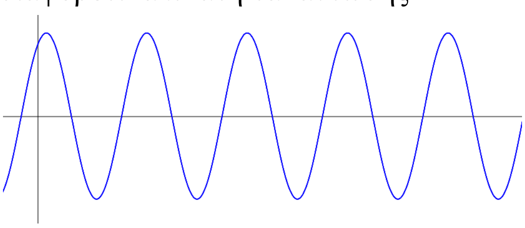
Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι της μορφής

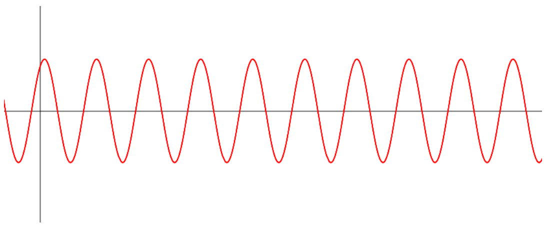
$$y = A\cos\sqrt{\kappa}t + B\sin\sqrt{\kappa}t$$

ή ισοδύναμα

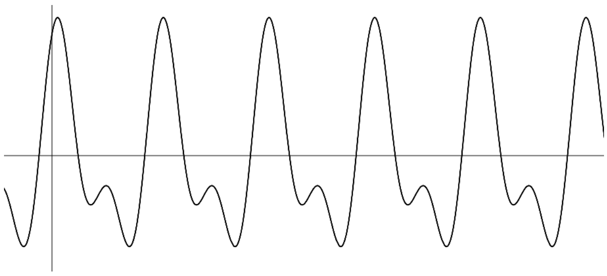
$$y = c\sin(\sqrt{\kappa}t + \varphi).$$

Ορισμένα σώματα έχουν την ικανότητα να εκτελούν περισσότερες από μία δονήσεις την ίδια στιγμή. Ας υποθέσουμε ότι κάποιο σώμα κατά τη δόνησή του εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις με συχνότητες ω, 2ω και διαφορετικά πλάτη ταλάντωσης.





Η γραφική παράσταση της σύνθεσης αυτών των δύο ταλαντώσεων είναι



Ο ήχος αυτός χαρακτηρίζεται από περιοδικότητα όμως είναι πιο σύνθετος από μια απλή αρμονική ταλάντωση και πιο ενδιαφέρον. Οι δύο απλές ταλαντώσεις συνεργάζονται αρμονικά για να δημιουργήσουν έναν ευχάριστο ήχο. Βασική προϋπόθεση όμως είναι να υπάρχει μια σχέση μεταξύ των συχνοτήτων τους. Αυτή την αριθμητική σχέση αναζήτησε ο Πυθαγόρας. Στη σύνθεση ενός τραγουδιού αυτό συμβαίνει σε μεγαλύτερη κλίμακα. Ο συνθέτης επιλέγει τους ήχους που πρέπει να συνηχούν την κάθε χρονική στιγμή φροντίζοντας το τελικό αποτέλεσμα είναι μουσικό και όχι θόρυβος αλλά και αρκετά σύνθετο ώστε να είναι ενδιαφέρον και να διεγείρει το μυαλό.

Η Πυθαγόρεια κλίμακα

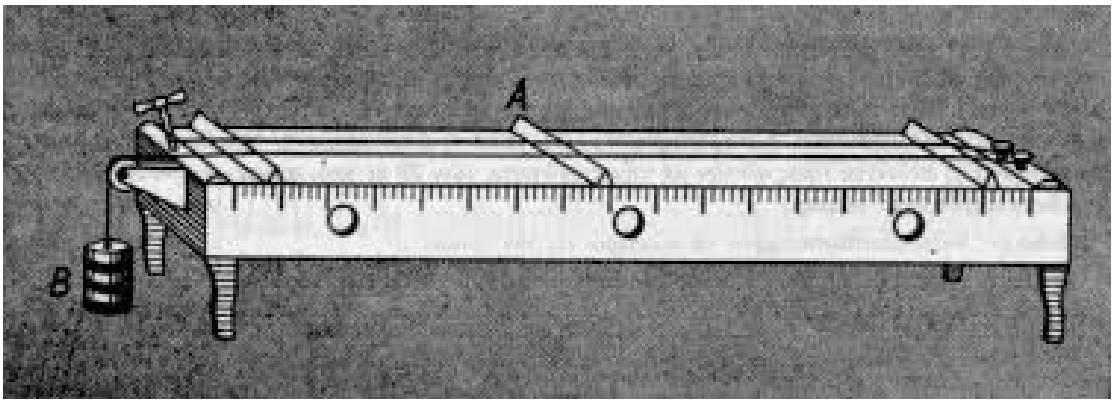
Για τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα ελάχιστα πράγματα είναι γνωστά. Αυτό οφείλεται στην έλλειψη πηγών από την εποχή του. Γνωρίζουμε για αυτόν μέσα από κείμενα σχολιαστών ή φιλοσόφων που, ενώ έζησαν αιώνες μετά τον Πυθαγόρα, είχαν στην διάθεσή τους πηγές που δεν έχουν σωθεί στις μέρες μας. Πληροφορίες για τους Πυθαγόρειους έχουμε στον διάλογο "Τίμαιος" του Πλάτωνα και στο έργο "Μετά τα φυσικά" του Αριστοτέλη. Δύο βιογραφίες του Πυθαγόρα που έχουν σωθεί είναι αυτές του Πορφύριου και του Ιάμβλιχου που έζησαν 800 χρόνια μετά.

Ο Πυθαγόρας αφού εγκατέλειψε την Σάμο λόγω του τύραννου Πολυκράτη εγκαταστάθηκε στον Κρότωνα της Νότιας Ιταλίας και ίδρυσε μια σχολή. Σε αυτή την σχολή μελετούσαν μαθηματικά και φιλοσοφία ταυτόχρονα όμως ήταν μια κλειστή αδελφότητα και η διδασκαλία γίνονταν μόνο σε μυημένους.

Στο έργο του Αριστοτέλη "Μετά τα Φυσικά" υπάρχει το παρακάτω απόσπασμα:

> *"Αυτοί που καλούνται Πυθαγόρειοι, ασχολήθηκαν πρώτοι με τα μαθηματικά και ανέπτυξαν αυτή τη σπουδή και αφού ανατράφηκαν μέσα σ' αυτά, θεώρησαν ότι οι αρχές τους είναι αρχές των πάντων".*

Για τη θεωρητική μελέτη των μουσικών διαστημάτων χρησιμοποιήθηκε ένα όργανο που ονομάζονταν μονόχορδο. Αποτελούνταν από ένα μακρόστενο ηχείο με μια χορδή που τεντωνόταν πάνω από ένα διαβαθμισμένο κανόνα και έναν μετακινούμενο καβαλάρη. Με αυτό το όργανο διαπιστώθηκε ότι αν χωρίσουμε τη χορδή σε δύο ίσα μέρη και αφήσουμε να ταλαντωθεί η μισή χορδή τότε ο ήχος που παράγεται είναι σε συμφωνία και τον ήχο που παράγει ολόκληρη η χορδή. Είναι το σύμφωνο διάστημα της οκτάβας ή διαπασών.



Βασική Αρχή: Κάθε φορά που διπλασιάζουμε ή υποδιπλασιάζουμε το μήκος της παλλόμενης χορδής παράγεται η ίδια νότα μία οκτάβα χαμηλότερα ή ψηλότερα.

Ένα δεύτερο σύμφωνο διάστημα που ανακαλύφθηκε με ανάλογο τρόπο είναι το διάστημα της πέμπτης καθαρής.

Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2\beta = \alpha + \gamma$. Σε αυτή την περίπτωση ο αριθμός β λέγεται αριθμητικός μέσος των α, γ.

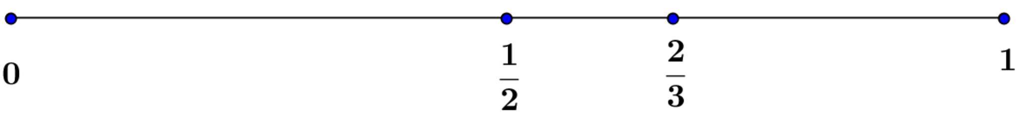
Παράδειγμα: 6, 9, 12.

Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου αν και μόνο αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Σε αυτή την περίπτωση ο αριθμός β λέγεται αρμονικός μέσος των α, γ και ισχύει $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$.

Παράδειγμα: 6, 8, 12.

Στα άκρα μιας χορδής αντιστοιχούμε τους αριθμούς 0 και 1. Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών αυτών είναι το $\frac{1}{2}$ και βρίσκεται στο μέσο της χορδής. Αν υποθέσουμε ότι η χορδή δίνει τη νότα Ντο τότε το τμήμα της χορδής από το 0 μέχρι το $\frac{1}{2}$ δίνει τη νότα Ντο'.

Ο αρμονικός μέσος των αριθμών $\frac{1}{2}$ και 1 είναι το $\frac{2}{3}$. Το τμήμα της χορδής από το 0 μέχρι το $\frac{2}{3}$ δίνει τη νότα Σολ.



Το μήκος της παλλόμενης χορδής και η συχνότητα είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Έτσι αν θέλουμε να ανεβούμε μια οκτάβα (δηλαδή να διπλασιάσουμε τη συχνότητα) τότε κάνουμε το μήκος της χορδής $\frac{1}{2}$, ενώ αν θέλουμε να ανεβούμε μια πέμπτη καθαρή (δηλαδή να πολλαπλασιάσουμε τη συχνότητα με $\frac{3}{2}$) τότε κάνουμε το μήκος της χορδής $\frac{2}{3}$.

1. Αρχική νότα: Ντο με συχνότητα x.
2. Μια οκτάβα πάνω από την αρχική νότα: Ντο' με συχνότητα $2x$.
3. Μια πέμπτη καθαρή πάνω από την αρχική νότα: Σολ με συχνότητα $\frac{3}{2}x$.
4. Μια πέμπτη καθαρή πάνω από την Σολ: Ρε' με συχνότητα $\frac{9}{4}x$. Χαμηλώνουμε τη νότα μια οκτάβα. Ρε με συχνότητα $\frac{9}{8}x$.
5. Μια πέμπτη καθαρή πάνω από την Ρε: Λα με συχνότητα $\frac{27}{16}x$.
6. Μια πέμπτη καθαρή πάνω από την Λα: Μι' με συχνότητα $\frac{81}{32}x$. Χαμηλώνουμε τη νότα μια οκτάβα. Μι με συχνότητα $\frac{81}{64}x$.
7. Μια πέμπτη καθαρή πάνω από την Μι: Σι με συχνότητα $\frac{243}{128}x$.
8. Κατεβαίνουμε μια πέμπτη καθαρή από την αρχική νότα Ντο: Φα' με συχνότητα $\frac{2}{3}x$. Ανεβάζουμε τη νότα μια οκτάβα. Φα με συχνότητα $\frac{4}{3}x$.

Όπως αναφέραμε η (θεμέλιος) συχνότητα μιας νότας και το μήκος της παλλόμενης χορδής είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Αν συμβολίσουμε με 1, για λόγους απλοποίησης, τη συχνότητα από την ταλάντωση ολόκληρης της χορδής τότε οι συχνότητες των υπόλοιπων φθόγγων της Πυθαγόρειας κλίμακας δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Νότα	Ντο	Ρε	Μι	Φα	Σολ	Λα	Σι	Ντο'
Λόγος συχνοτήτων	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
		$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^5}{2^7}$	

Το μέγεθος ενός διαστήματος είναι ο λόγος της μεγαλύτερης συχνότητας προς την μικρότερη. Στην παραπάνω κλίμακα ο τόνος έχει μέγεθος $\frac{9}{8}$ που είναι λίγο μεγαλύτερος από τον σημερινό ισοσυγκερασμένο και το ημιτόνιο έχει μέγεθος $\frac{256}{243}$ που είναι λίγο μικρότερο από το ισοσυγκερασμένο.

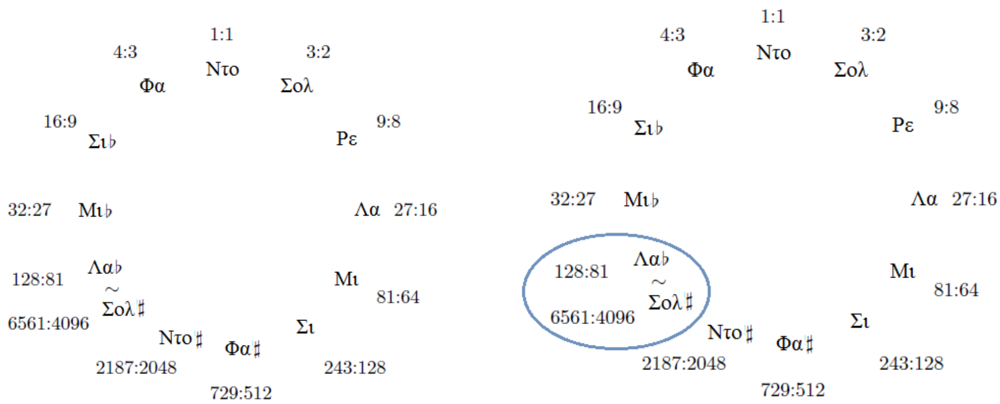
Πυθαγόρειος τόνος $\frac{9}{8}=1,125$ Τόνος $\sqrt[6]{2}=1,122462$

Πυθαγόρειο ημιτόνιο $\frac{256}{243}=1,053498$ Ημιτόνιο $\sqrt[12]{2}=1,059463$

Για τη δημιουργία της χρωματικής κλίμακας επεκτείνουμε την παραπάνω διαδικασία. Με αφετηρία το Ντο ανεβαίνουμε με πέμπτες μέχρι το Σολ# και κατεβαίνουμε με πέμπτες μέχρι το Λα♭. Στο σημερινό ισοσυγκερασμένο σύστημα οι δύο νότες συμπίπτουν όμως με την διαδικασία που περιγράψαμε η διαφορά των συχνοτήτων τους είναι

$$\frac{3^{12}}{2^{19}}=1,013643265\ldots$$

Η διαφορά αυτή ονομάζεται Πυθαγόρειο κόμμα και είναι περίπου το 1/4 του ημιτονίου.



Η αρμονία των ουράνιων σφαιρών

Στη σχολή των Πυθαγορείων αποδίδεται η αντίληψη ότι οι πλανήτες καθώς περιστρέφονται παράγουν διάφορους μουσικούς ήχους. Σύμφωνα με περιγραφές του Ιάμβλιχου και του Πορφύριου ο Πυθαγόρας μπορούσε να ακούσει την μουσική που παράγουν τα ουράνια σώματα κατά την κίνησή τους στον ουρανό.

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι η μουσική ήταν μια μαθηματική επιστήμη. Η ομορφιά της μουσικής ήταν αποτέλεσμα αρμονικών σχέσεων μεταξύ των αριθμών. Θεωρούσαν επίσης ότι η μουσική ήταν η εικόνα της ουράνιας αρμονίας. Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός στο Εγχειρίδιο 3 υποστηρίζει ότι τα ονόματα των επτά μουσικών φθόγγων προήλθαν από τους επτά πλανήτες και τη θέση τους σε σχέση με τη Γη. Η Σελήνη που βρίσκονταν πιο κοντά ήταν η χαμηλότερη νότα (νήτη) και ο Κρόνος που ήταν πιο μακριά ήταν η ψηλότερη νότα (υπάτη).

Σελήνη	νήτη
Ερμής	παρανήτη
Αφροδίτη	παραμέση
Ήλιος	μέση
Άρης	λιχανός
Δίας	παρυπάτη
Κρόνος	υπάτη

Έστω α, β δύο θετικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$.

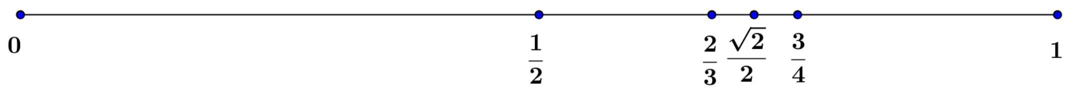
Αριθμητικός μέσος $\frac{\alpha+\beta}{2}$

Γεωμετρικός μέσος $\sqrt{\alpha\beta}$

Αρμονικός μέσος $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

Η διάταξη των τριών μέσων είναι $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Αν θεωρήσουμε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = 1$ τότε βρίσκουμε τους τρεις μέσους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το μουσικό διάστημα από το $\frac{2}{3}$ μέχρι το 1 είναι πέμπτη καθαρή.

Το μουσικό διάστημα από το $\frac{3}{4}$ μέχρι το 1 είναι τέταρτη καθαρή.

Το μουσικό διάστημα από το $\frac{\sqrt{2}}{2}$ μέχρι το 1 είναι τέταρτη αυξημένη.

Βιβλιογραφία

1. Αναπολιτάνος Δ, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Δ' Έκδοση, Εκδόσεις Νεφέλη.
2. Μιχαηλίδης Σ., *Εγκυκλοπαίδεια της αρχαίας Ελληνικής μουσικής*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.
3. Μωυσιάδης Χ., Σπυρίδης Χ., *Εφαρμοσμένα μαθηματικά στην επιστήμη της μουσικής*, Εκδόσεις Ζήτη.
4. Ράσσελ, Μπ. *Οι προσωκρατικοί*, Εκδόσεις Αρσενίδης.
5. Ράσσελ, Μπ. *Σωκράτης , Πλάτων και Αριστοτέλης*, Εκδόσεις Αρσενίδης.
6. Godwin, J., *The harmony of the spheres*, Inner Traditions, 1992.
7. Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*, vol. 1, 1921.
8. Sir James Jeans, *Science & music*, Cambridge Univ. Press, 1937. Reprinted by Dover, 1968.
9. Szabo, A., *The beginnings of Greek mathematics*, Synthese Historical Library, vol. 17, D. Reidel Publising Company, 1978.