Τομές κυκλικού και ελλειπτικού κυλίνδρου και παραβολοειδούς με επίπεδο

Ιορδάνης Καράουστας
iordanis.karaoustas@gmail.com

Αναστάσιος Στοϊκίδης
anstoik12@gmail.com

Νικόλαος Α. Φωτιάδης
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών
nikos.fotiades@gmail.com

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία μελετάμε τις τομές του ορθού κυκλικού και ελλειπτικού κυλίνδρου καθώς και του κυκλικού και ελλειπτικού παραβολοειδούς με ένα επίπεδο. Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση του ορθού κυκλικού κυλίνδρου και του κυκλικού παραβολοειδούς με δύο τρόπους: με τη χρήση ενός μετασχηματισμού στροφής στον χώρο, αλλά και με σφαίρες που εφάπτονται στην επιφάνεια και στο επίπεδο, και είναι γνωστές ως σφαίρες του Dandelin. Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση του ορθού ελλειπτικού κυλίνδρου και του ελλειπτικού παραβολοειδούς με τη χρήση ενός μετασχηματισμού στροφής στον χώρο.

Abstract

In this paper we study the sections of the right circular and elliptic cylinder as well as the circular and elliptic paraboloid with a plane. We first consider the case of the right circular cylinder and circular paraboloid in two ways: using a rotation transformation in space, but also with spheres that are tangent to the surface and plane, known as Dandelin spheres. We then study the case of the right elliptic cylinder and the elliptic paraboloid using a rotation transformation in space.

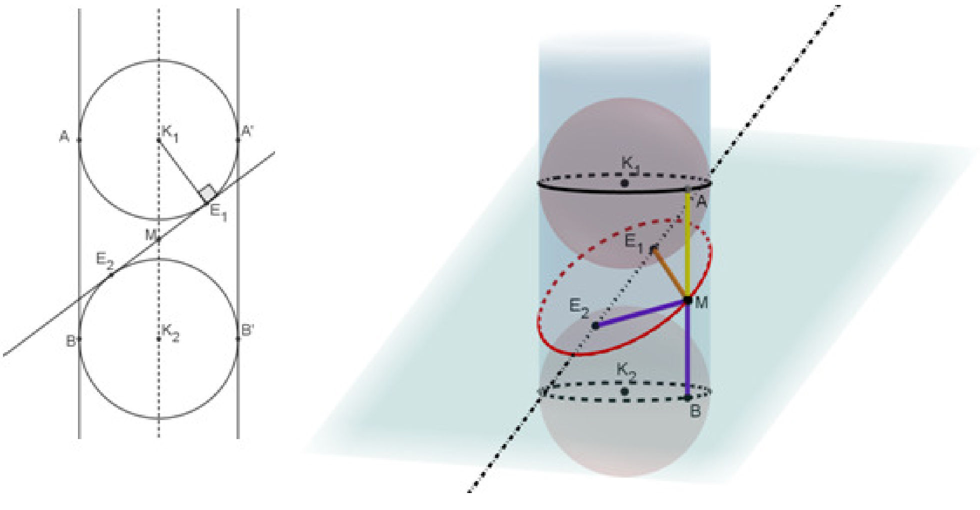
Λέξεις κλειδιά: Κύλινδρος, παραβολοειδές, κωνικές τομές, σφαίρες Dandelin, μετασχηματισμός στροφής στο χώρο.

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι οι μη εκφυλισμένες κωνικές τομές είναι ο κύκλος, η έλλειψη, η παραβολή και η υπερβολή [1], [2], [3]. Ένας τρόπος να αποδείξουμε αυτό το συμπέρασμα είναι με τη χρήση των σφαιρών του Dandelin [4], [5], [6]. Όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια οι μη εκφυλισμένες τομές του ορθού κυκλικού και ελλειπτικού κυλίνδρου με ένα επίπεδο είναι ο κύκλος και η έλλειψη, ενώ οι μη εκφυλισμένες τομές του κυκλικού και του ελλειπτικού παραβολοειδούς με ένα επίπεδο είναι ο κύκλος, η έλλειψη και η παραβολή.

Τομές ορθού κυκλικού κυλίνδρου με επίπεδο-γεωμετρική θεώρηση

Έστω C ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος ακτίνας ρ και Π ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις γενέτειρές του. Αν οι γενέτειρες του κυλίνδρου είναι κάθετες στο επίπεδο, η τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο είναι ένας κύκλος ακτίνας ρ. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι οι γενέτειρες του κυλίνδρου δεν είναι κάθετες στο επίπεδο. Θεωρούμε δύο επίπεδα παράλληλα στο Π που απέχουν από αυτό απόσταση ίση με ρ. Τα επίπεδα αυτά τέμνουν τον άξονα του κυλίνδρου στα σημεία $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$. Έστω $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ οι προβολές των $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ στο επίπεδο Π αντίστοιχα. Οι σφαίρες με κέντρα $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ και ακτίνα ρ εφάπτονται στον κύλινδρο C κατά μήκος δύο κύκλων που απέχουν απόσταση ΑΒ και εφάπτονται στο επίπεδο Π στα σημεία $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$. Οι σφαίρες αυτές ονομάζονται σφαίρες του Dandelin.



Σχήμα 1

Έστω Μ ένα τυχαίο σημείο στην τομή των C και Π. Είναι $\mathrm{ME}_1 = \mathrm{MA}$ και $\mathrm{ME}_2 = \mathrm{MB}$ ως εφαπτόμενα τμήματα στις σφαίρες. Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα $\mathrm{ME}_1 + \mathrm{ME}_2$ είναι σταθερό. Πράγματι,

$$\mathrm{ME}_1 + \mathrm{ME}_2 = \mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \mathrm{AB}.$$

Μετασχηματισμός στροφής στον χώρο

Στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα $x'x$ στον χώρο είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συνθ} & -\text{ημθ} \\ 0 & \text{ημθ} & \text{συνθ} \end{bmatrix}$$

ως προς τη συνήθη βάση $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ (βλέπε [7], [8]). Η εικόνα του σημείου $\mathrm{M}(x,y,z)$ μέσω του μετασχηματισμού T_θ είναι το σημείο $\mathrm{M}'(X,Y,Z)$, όπου

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συνθ} & -\text{ημθ} \\ 0 & \text{ημθ} & \text{συνθ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Ο αντίστροφος πίνακας του Α είναι

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συνθ} & \text{ημθ} \\ 0 & -\text{ημθ} & \text{συνθ} \end{bmatrix}$$

Η σχέση (1) γίνεται

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συνθ} & \text{ημθ} \\ 0 & -\text{ημθ} & \text{συνθ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} x = X \\ y = (\text{συνθ})Y + (\text{ημθ})Z \\ z = -(\text{ημθ})Y + (\text{συνθ})Z \end{cases} . \qquad (2)$$

Τομές ορθού κυκλικού κυλίνδρου με επίπεδο - αλγεβρική θεώρηση

Έστω C ο ορθός κυκλικός κύλινδρος με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Έστω $\mathrm{M}(x,y,z)$ ένα σημείο του κυλίνδρου και $\mathrm{M}'(X,Y,Z)$ η εικόνα του μέσω του μετασχηματισμού T_θ. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2) η εξίσωση $x^2+y^2=1$ γίνεται

$$X^2+[(\text{συν}\theta)Y+(\text{ημ}\theta)Z]^2=1.$$

Η τομή του κυλίνδρου που έχει εξίσωση $X^2+[(\text{συν}\theta)Y+(\text{ημ}\theta)Z]^2=1$ με το XY – επίπεδο περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων:

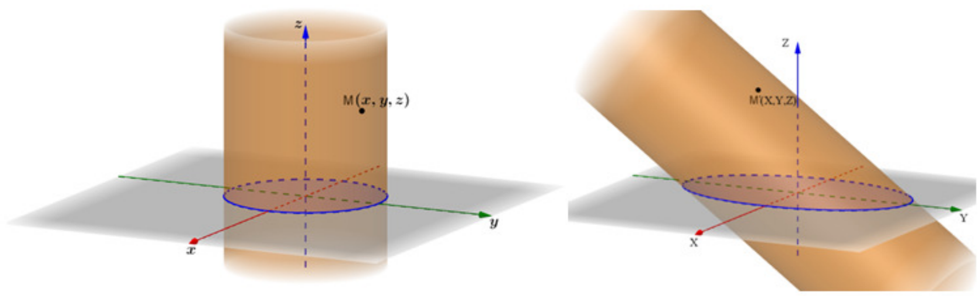
$$\begin{cases} X^2+[(\text{συν}\theta)Y+(\text{ημ}\theta)Z]^2=1 \\ Z=0 \end{cases}.$$

Έτσι προκύπτει η εξίσωση

$$X^2+(\text{συν}^2\theta)Y^2=1. \tag{3}$$

Εξετάζουμε την εξίσωση (3) για διάφορες τιμές της γωνίας $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Αν $\theta=0$ η εξίσωση (3) γίνεται $X^2+Y^2=1$ που είναι ο μοναδιαίος κύκλος.
- Αν $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η εξίσωση (3) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα $Y'Y$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\text{ημ}\theta$.
- Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$ η εξίσωση (3) γίνεται $X^2=1$ που παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες (εκφυλισμένη τομή).



Σχήμα 2

Τομές κυκλικού παραβολοειδούς με επίπεδο

Έστω C το κυκλικό παραβολοειδές με εξίσωση $z = x^2 + y^2 - 1$. Έστω $\mathrm{M}(x, y, z)$ ένα σημείο του παραβολοειδούς και $\mathrm{M}'(X, Y, Z)$ η εικόνα του μέσω του μετασχηματισμού T_θ. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2) η εξίσωση $z = x^2 + y^2 - 1$ γίνεται

$$-(\text{ημθ})Y + (\text{συνθ})Z = X^2 + [(\text{συνθ})Y + (\text{ημθ})Z]^2 - 1.$$

Η τομή του παραβολοειδούς που έχει την παραπάνω εξίσωση με το $XY-$ επίπεδο περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων:

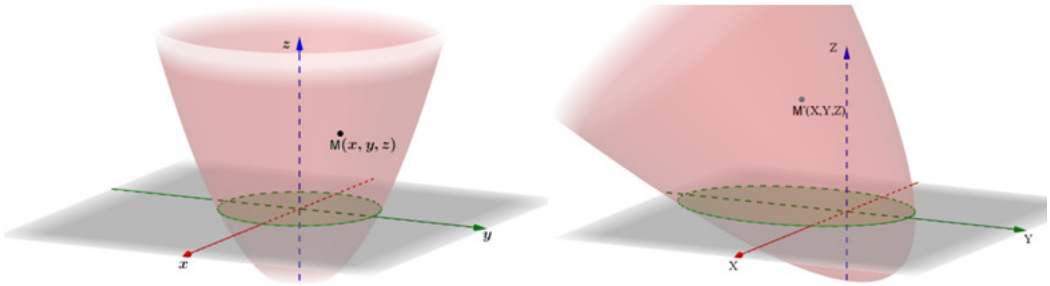
$$\begin{cases} -(\text{ημθ})Y + (\text{συνθ})Z = X^2 + [(\text{συνθ})Y + (\text{ημθ})Z]^2 - 1 \\ Z = 0 \end{cases}.$$

Έτσι προκύπτει η εξίσωση

$$-(\text{ημθ})Y = X^2 + (\text{συν}^2\theta)Y^2 - 1. \qquad (4)$$

Εξετάζουμε την εξίσωση (4) για διάφορες τιμές της γωνίας $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Αν $\theta = 0$ η εξίσωση (4) γίνεται $X^2 + Y^2 = 1$ που είναι ο μοναδιαίος κύκλος.
- Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η εξίσωση (4) παριστάνει έλλειψη με κέντρο $K\left(0, -\frac{\text{ημθ}}{2\text{συν}^2\theta}\right)$, εστίες στον άξονα $Y'Y$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \text{ημθ}$.
- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ η εξίσωση (4) γίνεται $Y = -X^2 + 1$ που παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $K(0,1)$ και άξονα συμμετρίας τον $Y'Y$.



Σχήμα 3

Οι σφαίρες του Dandelin στο κυκλικό παραβολοειδές

Έστω C το κυκλικό παραβολοειδές με εξίσωση $z = x^2 + y^2 - 1$ και Π το επίπεδο με εξίσωση $z = \lambda y$, $\lambda > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν δύο σφαίρες που έχουν εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2$ και εφάπτονται στο παραβολοειδές C και στο επίπεδο Π.

Όταν η σφαίρα εφάπτεται στο παραβολοειδές τα κοινά τους σημεία αποτελούν κύκλο που ανήκει σε ένα επίπεδο παράλληλο στο $xy-$επίπεδο. Από το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2 \end{cases}$$

προκύπτει η εξίσωση

$$z + 1 + (z - z_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow z^2 - (2z_0 - 1)z + (1 + z_0^2 - \rho^2) = 0 . \qquad (5)$$

Για να εφάπτεται η σφαίρα στο παραβολοειδές πρέπει η εξίσωση (5) να έχει μοναδική λύση, δηλαδή,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\rho^2 - 4z_0 - 3 = 0 . \qquad (6)$$

Για να εφάπτεται η σφαίρα στο επίπεδο πρέπει η απόσταση του κέντρου $\mathrm{K}(0,0,z_0)$ της σφαίρας από το επίπεδο να είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας, δηλαδή

$$d(\mathrm{K}, \Pi) = \rho \Leftrightarrow \frac{|z_0|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \rho . \qquad (7)$$

Από τις εξισώσεις (6) και (7) προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{4}{\lambda^2 + 1} z_0^2 - 4z_0 - 3 = 0$$

που έχει λύσεις

$$z_{0,1} = \frac{\lambda^2 + 1 + \sqrt{(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4)}}{2} \quad \text{ή} \quad z_{0,2} = \frac{\lambda^2 + 1 - \sqrt{(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4)}}{2} .$$

Κάθε μια από τις παραπάνω τιμές του z_0 προσδιορίζει το κέντρο $\mathrm{K}(0,0,z_0)$ και την ακτίνα $\rho = \dfrac{|z_0|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ μιας σφαίρας που εφάπτεται στο παραβολοειδές και στο επίπεδο.

Στο Σχήμα 4 φαίνεται η προβολή του παραβολοειδούς C, του επιπέδου Π και των δύο σφαιρών Dandelin στο $yz-$επίπεδο. Έστω M σημείο που ανήκει στην τομή του παραβολοειδούς με το επίπεδο και $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ τα σημεία επαφής των σφαιρών με το επίπεδο. Το ευθύγραμμο τμήμα AA' είναι η προβολή του κύκλου κατά μήκος του οποίου εφάπτονται το παραβολοειδές και η σφαίρα με κέντρο K_1. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{ME}_1 = \mathrm{MM}_1$, όπου M_1 είναι η προβολή του σημείου M στο επίπεδο του κύκλου που έχει προβολή το τμήμα AA'. Έστω $\mathrm{M}(x,y,z)$ και $\mathrm{K}_1(0,0,z_{0,1})$, τότε $\mathrm{MK}_1^2 = x^2+y^2+(z-z_{0,1})^2$. Όμως το σημείο M ανήκει στο παραβολοειδές, επομένως $x^2+y^2=z+1$, άρα

$$\mathrm{MK}_1^2 = z+1+(z-z_{0,1})^2 \tag{8}$$

Για τις συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{A}(x,y,z_1)$ ισχύει $z_1 = z+\mathrm{MM}_1$, επομένως η ισότητα (8) γίνεται διαδοχικά

$$\mathrm{MK}_1^2 = z_1 - \mathrm{MM}_1 + 1 + \left[(z_1-\mathrm{MM}_1) - z_{0,1}\right]^2$$
$$\mathrm{MK}_1^2 = z_1 - \mathrm{MM}_1 + 1 + \left[(z_1-z_{0,1}) - \mathrm{MM}_1\right]^2$$
$$\mathrm{MK}_1^2 = z_1 + 1 + (z_1-z_{0,1})^2 - 2\mathrm{MM}_1(z_1 - z_{0,1} + \frac{1}{2}) + \mathrm{MM}_1^2$$

Ο αριθμός z_1 αποτελεί λύση της εξίσωσης (5) επομένως ισχύουν οι ισότητες $z_1+1+(z_1-z_{0,1})^2 = \rho_1^2$ και $z_1 = \dfrac{2z_{0.1}-1}{2}$ (αφού $\Delta = 0$).

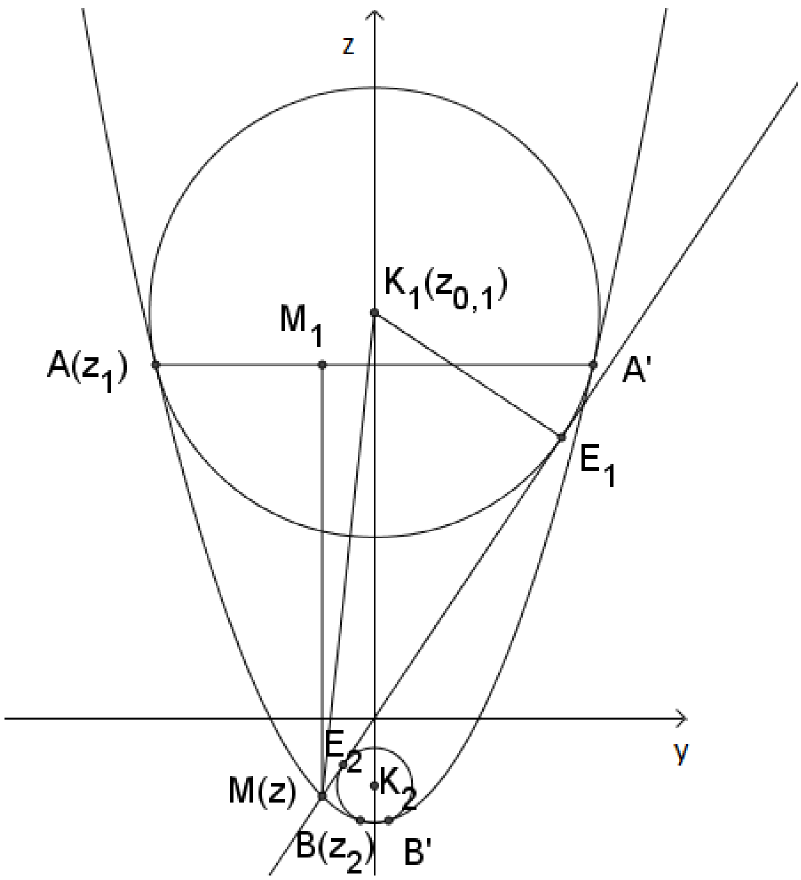
Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $\mathrm{MK}_1^2 = \rho_1^2 + \mathrm{MM}_1^2$. (9)

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\mathrm{MK}_1\mathrm{E}_1$ έχουμε ότι

$$\mathrm{ME}_1 = \sqrt{\mathrm{MK}_1^2 - \rho_1^2} \overset{(9)}{=} \sqrt{\mathrm{MM}_1^2} = \mathrm{MM}_1.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα BB' είναι η προβολή του κύκλου κατά μήκος του οποίου εφάπτονται το παραβολοειδές και η σφαίρα με κέντρο K_2. Ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε ότι $ME_2 = MM_2$, όπου M_2 είναι η προβολή του σημείου M στο επίπεδο του κύκλου που έχει προβολή το τμήμα BB'. Επομένως

$$ME_1 + ME_2 = MM_1 + MM_2 = M_1M_2 = \text{σταθερό}.$$



Σχήμα 4

Τομές ορθού ελλειπτικού κυλίνδρου με επίπεδο

Έστω C ο ορθός ελλειπτικός κύλινδρος με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\alpha>\beta>0$. Έστω $\mathrm{M}(x,y,z)$ ένα σημείο του κυλίνδρου και $\mathrm{M}'(X,Y,Z)$ η εικόνα του μέσω του μετασχηματισμού T_θ. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2) η εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ γίνεται

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{[(\text{συνθ})Y+(\text{ημθ})Z]^2}{\beta^2}=1.$$

Η τομή του κυλίνδρου που έχει εξίσωση $\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{[(\text{συνθ})Y+(\text{ημθ})Z]^2}{\beta^2}=1$ με το $XY-$ επίπεδο περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases}\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{[(\text{συνθ})Y+(\text{ημθ})Z]^2}{\beta^2}=1\\ Z=0\end{cases}.$$

Έτσι προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{X^2}{\alpha^2}+\frac{(\text{συν}^2\theta)Y^2}{\beta^2}=1. \tag{10}$$

Έστω $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η γωνία για την οποία ισχύει $\text{συν}\theta_0=\frac{\beta}{\alpha}$. Εξετάζουμε την εξίσωση (10) για διάφορες τιμές της γωνίας $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Αν $\theta\in[0,\theta_0)$ η εξίσωση (10) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα $X'X$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2\text{συν}^2\theta}}$.
- Αν $\theta=\theta_0$ η εξίσωση (10) γίνεται $X^2+Y^2=\alpha^2$ που είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα α.
- Αν $\theta\in\left(\theta_0,\frac{\pi}{2}\right)$ η εξίσωση (10) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα $Y'Y$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{\alpha^2\text{συν}^2\theta}{\beta^2}}$.

- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ η εξίσωση (10) γίνεται $X^2 = \alpha^2$ που παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες (εκφυλισμένη τομή).

Τομές ελλειπτικού παραβολοειδούς με επίπεδο

Έστω C το ελλειπτικό παραβολοειδές με εξίσωση $z = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$. Έστω $\mathrm{M}(x, y, z)$ ένα σημείο του παραβολοειδούς και $\mathrm{M}'(X, Y, Z)$ η εικόνα του μέσω του μετασχηματισμού T_θ. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2) η εξίσωση $z = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$ γίνεται

$$-(\eta\mu\theta)Y + (\sigma\upsilon\nu\theta)Z = \frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{[(\sigma\upsilon\nu\theta)Y + (\eta\mu\theta)Z]^2}{\beta^2}.$$

Η τομή του παραβολοειδούς που έχει την παραπάνω εξίσωση με το XY– επίπεδο περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} -(\eta\mu\theta)Y + (\sigma\upsilon\nu\theta)Z = \frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{[(\sigma\upsilon\nu\theta)Y + (\eta\mu\theta)Z]^2}{\beta^2} \\ Z = 0 \end{cases}.$$

Έτσι προκύπτει η εξίσωση

$$-(\eta\mu\theta)Y = \frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{(\sigma\upsilon\nu^2\theta)Y^2}{\beta^2}. \tag{11}$$

Έστω $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η γωνία για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta_0 = \frac{\beta}{\alpha}$. Εξετάζουμε την εξίσωση (11) για διάφορες τιμές της γωνίας $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Αν $\theta \in [0, \theta_0)$ η εξίσωση (11) παριστάνει έλλειψη με κέντρο $K\left(0, -\frac{\beta^2\eta\mu\theta}{2\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)$, εστίες στον άξονα $X'X$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}}$.

- Αν $\theta = \theta_0$ η εξίσωση (11) γίνεται $X^2 + \left(Y + \dfrac{\alpha^2 \eta\mu\theta}{2}\right)^2 = \dfrac{\alpha^4 \eta\mu^2\theta}{4}$ που είναι κύκλος με κέντρο $K\left(0, -\dfrac{\alpha^2 \eta\mu\theta}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\alpha^2 \eta\mu\theta}{2}$.
- Αν $\theta \in \left(\theta_0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ η εξίσωση (11) παριστάνει έλλειψη με κέντρο $K\left(0, -\dfrac{\beta^2 \eta\mu\theta}{2\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)$, εστίες στον άξονα $Y'Y$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{1 - \dfrac{\alpha^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\beta^2}}$.
- Αν $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ η εξίσωση (11) γίνεται $X^2 = -\alpha^2 Y$ που παριστάνει παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $Y'Y$.

Βιβλιογραφία

1. Απολλώνιος, *Κωνικά*, Τόμος Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, μετάφραση Ε. Σταμάτη, Έκδοση Τ.Ε.Ε., Αθήνα 1975.
2. Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών, Β΄ Γενικού Λυκείου, ΙΤΥΕ Διόφαντος (2022).
3. J. Coolidge (1968) *A History of the Conic Sections and Quadratic Surfaces*, Dover Publications, Inc. New York.
4. Π. Πάμφιλος (2016) *Γεωμετρικόν*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
5. Ν. Φωτιάδης, (2014) *Διδάσκοντας τις κωνικές τομές με το Cabri 3D*, Πρακτικά 31ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας της ΕΜΕ σελ. 986-996.
6. K. Kendig (2005) *Conics*, Cambridge University Press.
7. Α. Φελλούρης (2017) *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Εκδ. Τσότρας.
8. J. T. Smith (2000) *Methods of Geometry*, John Wiley & Sons.