

Τριγωνικές πλακοστρώσεις στην επιφάνεια της σφαίρας

Φωτιάδης Α. Νικόλαος
Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών
E-mail: nikos.fotiades@gmail.com

Περίληψη

Οι πλακοστρώσεις της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι ένα αντικείμενο που έχει μελετηθεί συστηματικά με γεωμετρικές και συνδυαστικές μεθόδους. Στην εργασία αυτή εξετάζουμε πλακοστρώσεις της σφαίρας με ίσα σφαιρικά τρίγωνα. Οι πλακοστρώσεις της σφαίρας παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές από τις πλακοστρώσεις του επιπέδου και αυτό οφείλεται στις διαφορές της σφαιρικής γεωμετρίας από την επίπεδη γεωμετρία. Αναφέρουμε ενδεικτικά ότι ο αριθμός των τριγώνων που απαιτούνται για την κάλυψη της σφαίρας είναι πεπερασμένος και ισούται με τον λόγο του εμβαδού της σφαίρας προς το εμβαδό του σφαιρικού τριγώνου.

Abstract

The tilings of the surface of a sphere is an object that has been systematically studied by geometrical and combinatorial methods. In this paper we consider tilings of the sphere with equal spherical triangles. Sphere tilings show significant differences from plane tilings and this is due to the differences of spherical geometry from planar geometry. We mention indicatively that the number of triangles required to cover the sphere is finite and is equal to the ratio of the area of the sphere to the area of the spherical triangle.

Λέξεις κλειδιά: Σφαίρα, σφαιρικά τρίγωνα, πλακοστρώσεις της σφαίρας.

Εισαγωγή

Μια πλακόστρωση της σφαίρας ονομάζεται *ομοεδρική* αν τα σχήματα που την καλύπτουν είναι όλα ίσα μεταξύ τους. Κάθε ένα από τα ίσα

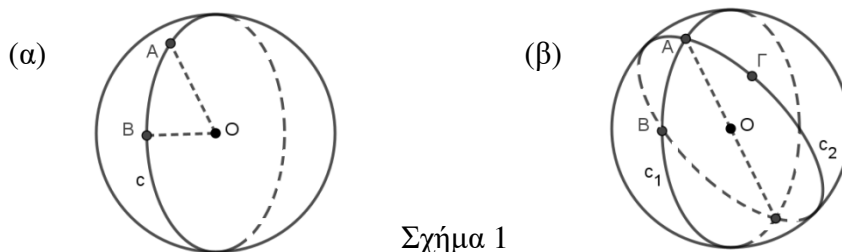
σχήματα της πλακόστρωσης ονομάζεται *πρότυπο*. Στην περίπτωση που δύο οποιαδήποτε γειτονικά σχήματα της πλακόστρωσης έχουν ως σύνορο μια κοινή πλευράς τους η πλακόστρωση λέμε ότι είναι *πλευρά με πλευρά*. Το 1924 ο Sommerville ταξινόμησε τις ομοεδρικές πλευρά με πλευρά πλακοστρώσεις της σφαίρας με ισοσκελή τρίγωνα [1]. Στην ίδια εργασία γίνεται μερική ταξινόμηση των ομοεδρικών πλακοστρώσεων της σφαίρας με σκαληνά τρίγωνα με τον περιορισμό ότι οι γωνίες που συναντιούνται σε μια κορυφή είναι όλες ίσες μεταξύ τους. Πλήρη ταξινόμηση των τριγωνικών ομοεδρικών πλευρά με πλευρά πλακοστρώσεων της σφαίρας έκαναν το 2002 οι Ueno και Agaoka [2]. Αν παραβλέψουμε τον περιορισμό να είναι η πλακόστρωση πλευρά με πλευρά, είναι δυνατόν να βρούμε πολλές άλλες ομοεδρικές τριγωνικές πλακοστρώσεις της σφαίρας [3], [4]. Για το θέμα αυτό υπάρχει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον και έχουν δημοσιευτεί αρκετές εργασίες, όμως μέχρι σήμερα δεν έχει επιτευχθεί η πλήρης ταξινόμηση αυτών των πλακοστρώσεων.

Στοιχεία σφαιρικής γεωμετρίας

Η γεωμετρία της σφαίρας παρουσιάζει σημαντικές διαφορές από τη γεωμετρία του επιπέδου. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ορισμένα στοιχεία της σφαιρικής γεωμετρίας (βλέπε [5]) που είναι απαραίτητα για την κατανόηση της εργασίας.

Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε μια σφαίρα θα υποθέτουμε ότι η ακτίνα της ισούται με 1. *Μέγιστος κύκλος* ονομάζεται η τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της. Οι μέγιστοι κύκλοι αποτελούν τις ευθείες της σφαιρικής γεωμετρίας. Δύο σημεία A, B της σφαίρας λέγονται *αντιδιαμετρικά* αν το μέσο του τμήματος AB ταυτίζεται με το κέντρο O της σφαίρας.

Αν A, B είναι δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας, τότε υπάρχει μοναδικός μέγιστος κύκλος c που διέρχεται από αυτά (Σχήμα 1(α)). Το μικρότερο από τα τόξα του κύκλου c που ορίζουν τα A, B ονομάζεται *σφαιρικό τμήμα* \widehat{AB} .



Σχήμα 1

Επειδή η ακτίνα της σφαίρας ισούται με 1 το μήκος ενός σφαιρικού τμήματος \widehat{AB} ισούται με το μέτρο της γωνίας \widehat{AOB} (μετράμε τις γωνίες με ακτίνα).

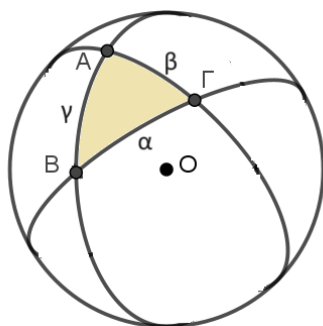
Έστω c_1, c_2 δύο μέγιστοι κύκλοι και A ένα από τα δύο κοινά τους σημεία. Έστω B ένα σημείο του κύκλου c_1 και Γ ένα σημείο του κύκλου c_2 .

Τα σφαιρικά τμήματα \widehat{AB} και $\widehat{A\Gamma}$ σχηματίζουν μια *σφαιρική γωνιά* η οποία ισούται με τη διέδρη γωνία που σχηματίζεται από τα ημιεπίπεδα των κύκλων c_1, c_2 που ορίζονται από την κοινή διάμετρο και τα σημεία B, Γ (Σχήμα 1(β)).

Θεωρούμε τρία σημεία A, B, Γ της σφαίρας τα οποία δεν ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο. Τα σφαιρικά τμήματα \widehat{AB} , $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{B\Gamma}$ οριοθετούν δύο σφαιρικές περιοχές. Η μικρότερη από αυτές ονομάζεται *κυρτό σφαιρικό τρίγωνο*, ενώ η μεγαλύτερη κοίλο σφαιρικό τρίγωνο (Σχήμα 2). Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με κυρτά σφαιρικά τρίγωνα, για αυτό όταν γράφουμε σφαιρικό τρίγωνο θα εννοούμε κυρτό. Συμβολίζουμε τις πλευρές \widehat{AB} , $\widehat{A\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma}$ του τριγώνου με γ, β, α αντίστοιχα.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η ανισότητα $A+B+\Gamma > \pi$. Η παράσταση $A+B+\Gamma - \pi$ ονομάζεται *σφαιρική υπεροχή* του τριγώνου και ισούται με το εμβαδό του σφαιρικού τριγώνου $AB\Gamma$. Αν υπάρχει τριγωνική ομοεδρική πλακόστρωση της σφαίρας, τότε το εμβαδό της, που είναι 4π , θα πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου που χρησιμοποιείται ως πρότυπο. Επομένως, μια αναγκαία συνθήκη για να μπορεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο σε μια

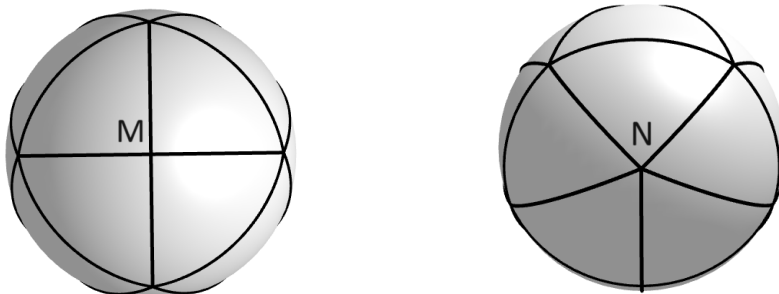
ομοεδρική πλακόστρωση της σφαίρας είναι $\frac{4\pi}{A+B+\Gamma - \pi} \in \mathbb{N}$.



Σχήμα 2

Σε μια πλακόστρωση συμβολίζουμε με F, E, V το πλήθος των εδρών, των ακμών και των κορυφών αντίστοιχα. Αν η πλακόστρωση είναι τριγωνική ομοεδρική και πλευρά με πλευρά, το πλήθος των ακμών είναι $3F$, όμως η κάθε ακμή έχει μετρηθεί δύο φορές γιατί αποτελεί το σύνορο ανάμεσα σε δύο τρίγωνα, επομένως $E = \frac{3}{2}F$. Από αυτή την ισότητα προκύπτει ότι το πλήθος F των τριγώνων πρέπει να είναι άρτιος αριθμός. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler για τα κυρτά πολύεδρα $V - E + F = 2$ και την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $V = \frac{1}{2}F + 2$.

Σε κάθε κορυφή μιας τριγωνικής ομοεδρικής πλακόστρωσης υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ, λ, μ ώστε $\kappa A + \lambda B + \mu \Gamma = 2\pi$. Η παράσταση $\kappa A + \lambda B + \mu \Gamma$ λέγεται *τύπος της κορυφής* και δείχνει πόσες γωνίες A , πόσες B και πόσες Γ συναντιούνται στην κορυφή. Σε μια πλακόστρωση μπορεί να έχουμε κορυφές με διαφορετικό τύπο. Στο σχήμα 3 φαίνονται δύο όψεις της πλακόστρωσης με τρίγωνα που οι γωνίες τους είναι $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$. Πρόκειται για ένα ορθογώνιο και ισοσκελές σφαιρικό τρίγωνο. Η σφαιρική υπεροχή του τριγώνου είναι $\frac{\pi}{4}$, επομένως για την κάλυψη της σφαίρας απαιτούνται $F = 4\pi : \frac{\pi}{4} = 16$ τρίγωνα. Η κορυφή M είναι τύπου $4 \cdot \frac{\pi}{2}$ και η κορυφή N είναι τύπου $\frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{3\pi}{8}$. Επομένως μια ακόμη αναγκαία συνθήκη για να μπορεί το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο σε μια ομοεδρική πλακόστρωση της σφαίρας είναι σε κάθε κορυφή να υπάρχουν $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$ ώστε $\kappa A + \lambda B + \mu \Gamma = 2\pi$.



Σχήμα 3

Κατασκευή σφαιρικών τριγώνων με το GeoGebra

Οι γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου καθορίζουν τα μήκη των πλευρών του. Ισχύουν οι τύποι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu B \eta\mu \Gamma}$$

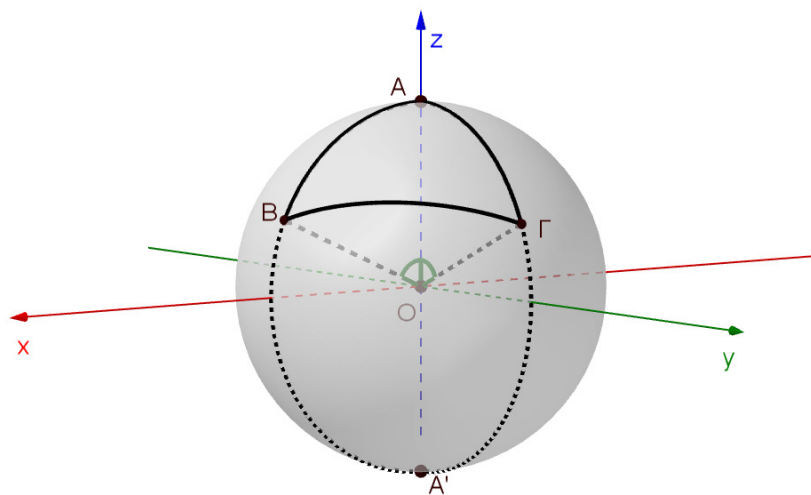
$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma \sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu \Gamma \eta\mu A}$$

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma + \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A \eta\mu B}$$

Για παράδειγμα στο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{3\pi}{8}$, $\Gamma = \frac{3\pi}{8}$, χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους βρίσκουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu\gamma = \sqrt{2} - 1$. Άρα

$$\alpha = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(3 - 2\sqrt{2}) \text{ και } \beta = \gamma = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2} - 1).$$

Στη συνέχεια περιγράφουμε πώς κατασκευάστηκαν τα πρότυπα σφαιρικά τρίγωνα κάθε πλακόστρωσης της εργασίας με το GeoGebra. Ας υποθέσουμε ότι δίνονται οι γωνίες A, B, Γ ενός σφαιρικού τριγώνου. Τοποθετούμε το σημείο A στο $(0, 0, 1)$, το σημείο B στο ημικύκλιο που έχει παραμετρική εξίσωση $\vec{r}_1(t) = (\eta\mu t, 0, \sigma\upsilon\nu t)$, $t \in (0, \pi)$ και το σημείο Γ στο ημικύκλιο που έχει παραμετρική εξίσωση $\vec{r}_2(t) = (\sigma\upsilon\nu A \eta\mu t, \eta\mu A \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)$, $t \in (0, \pi)$.



Σχήμα 4

Το ημικύκλιο που έχει παραμετρική εξίσωση \vec{r}_2 προέκυψε από τη στροφή του ημικυκλίου που έχει παραμετρική εξίσωση \vec{r}_1 γύρω από τον z-άξονα κατά γωνία A . Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι η γωνία της κορυφής A στο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι η επιθυμητή. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του σημείου B θα πρέπει η τιμή της παραμέτρου t να ισούται με τη γωνία \widehat{AOB} (Σχήμα 4). Δηλαδή $t = \gamma$ όπου

$$\gamma = \text{τοξσυν} \frac{\text{συν}\Gamma + \text{συν}A \text{συν}B}{\eta\mu A \eta\mu B}.$$

Ανάλογα προσδιορίζουμε τη θέση του σημείου Γ .

Πλακοστρώσεις με ισόπλευρα τρίγωνα

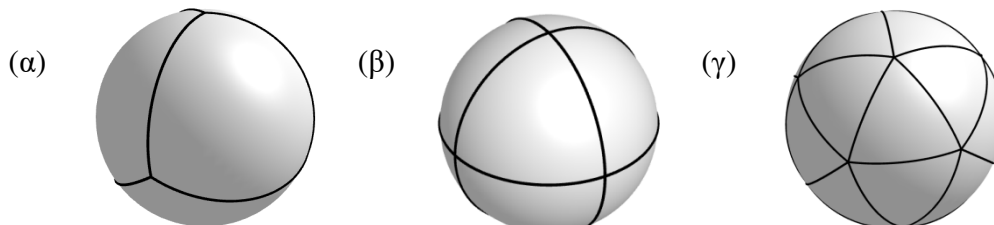
Υποθέτουμε ότι το πρότυπο τρίγωνο μιας ομοεδρικής πλακόστρωσης της σφαίρας είναι ισόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο με γωνίες $A = B = \Gamma$. Ο τύπος της κάθε κορυφής είναι ίδιος για όλες τις κορυφές, αφού οι γωνίες των τριγώνων είναι όλες ίσες. Αν το πλήθος των γωνιών A σε κάθε κορυφή είναι κ , τότε $A = \frac{2\pi}{\kappa}$. Όμως $A < \pi$, οπότε $\kappa > 2$.

Το πλήθος των εδρών της πλακόστρωσης είναι

$$F = \frac{4\pi}{3A - \pi} = \frac{4\pi}{\frac{6\pi}{\kappa} - \pi} = \frac{4\kappa}{6 - \kappa}$$

και είναι ένας άρτιος θετικός αριθμός, οπότε πρέπει $\kappa < 6$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για την τιμή του κ υπάρχουν τρεις επιλογές.

- Για $\kappa = 3$ είναι $A = \frac{2\pi}{3}$ και $F = 4$. Σχήμα 5(α)
- Για $\kappa = 4$ είναι $A = \frac{\pi}{2}$ και $F = 8$. Σχήμα 5(β)
- Για $\kappa = 5$ είναι $A = \frac{2\pi}{5}$ και $F = 20$. Σχήμα 5(γ)



Σχήμα 5

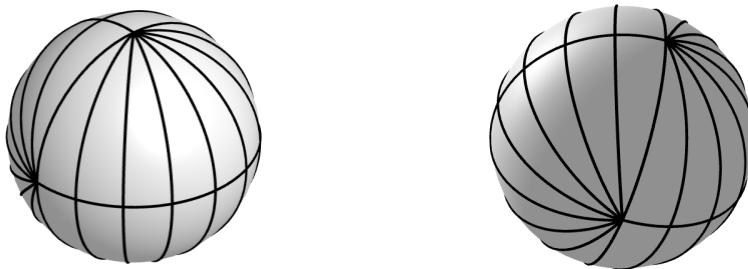
Πλακοστρώσεις με ορθογώνια τρίγωνα

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε όλες τις δυνατές ομοεδρικές πλακοστρώσεις πλευρά με πλευρά με σφαιρικά τρίγωνα που έχουν μία τουλάχιστον ορθή γωνία [6]. Στη στήλη με τους τύπους των κορυφών ο αριθμός που σημειώνεται σε κάθε παρένθεση δηλώνει το πλήθος των κορυφών της πλακόστρωσης που έχουν τον συγκεκριμένο τύπο. Σε κάθε πλακόστρωση το άθροισμα των αριθμών που σημειώνονται σε παρένθεση ισούται με το πλήθος V των κορυφών.

Ορισμένες από τις περιπτώσεις του πίνακα είναι μεμονωμένες πλακοστρώσεις (π.χ. 2, 3, 4, 5), ενώ κάποιες άλλες είναι οικογένειες πλακοστρώσεων που το πλήθος των μελών τους είναι συνεχές (π.χ. 1) ή αριθμήσιμο (π.χ. 6, 7, 8, 9).

	A	B	Γ	F	E	V	Τύπος κορυφής
1.	$\frac{\pi}{2}$	ω $\frac{\pi}{2} \leq \omega < \frac{3\pi}{4}$	$\pi - \omega$	8	12	6	4A (2), 2B+2Γ (4)
2.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	16	24	10	4A (2), A+2B+2Γ (8)
3.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	48	72	26	4A (12), 6B (8), 8Γ (6)
4.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	48	72	26	4A ($\mu+6$), 6B (8), 8Γ (μ) 2A+4Γ ($12-2\mu$)
5.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	120	180	62	4A (30), 6B (20), 10Γ (12)
6.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{n}$	$2n$	$3n$	$n+2$	2A+2B (n), $n\Gamma$ (2)
7.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{n}$	$4n$	$6n$	$2n+2$	2A+2B ($2n-2$), A+B+ $n\Gamma$ (4)
8.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{(n-1)\pi}{2n}$	$\frac{\pi}{n}$	$8n$	$12n$	$4n+2$	4A ($2n$), $2n\Gamma$ (2), 4B+2Γ ($2n$)
9.	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{(n-1)\pi}{2n-1}$	$\frac{\pi}{2n-1}$	$16n-8$	$24n-12$	$8n-2$	4A ($4n-2$), 4B+2Γ ($4n-4$), 2B+2 $n\Gamma$ (4)

Στο σχήμα 5(β) φαίνεται η περίπτωση 1 για $\omega = \frac{\pi}{2}$, ενώ στο σχήμα 3 φαίνονται δύο όψεις της περίπτωσης 2. Στο σχήμα 6 απεικονίζονται δύο όψεις της περίπτωσης 7 για $n = 8$.



Σχήμα 6

Μια πλακόστρωση που δεν είναι πλευρά με πλευρά

Θεωρούμε το σφαιρικό τρίγωνο με γωνίες $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{3\pi}{5}$, $\Gamma = \frac{3\pi}{10}$. Η σφαιρική υπεροχή του τριγώνου είναι $A + B + \Gamma - \pi = \frac{4\pi}{10}$, επομένως απαιτούνται $F = \frac{4\pi}{A + B + \Gamma - \pi} = 10$ τρίγωνα για να καλύψουν την επιφάνεια της σφαίρας.

Για να βρούμε τους τύπους των κορυφών μιας πλακόστρωσης με πρότυπο το συγκεκριμένο τρίγωνο αναζητούμε $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\kappa \frac{\pi}{2} + \lambda \frac{3\pi}{5} + \mu \frac{3\pi}{10} = 2\pi \Leftrightarrow 5\kappa + 6\lambda + 3\mu = 20 \Leftrightarrow 6\lambda + 3\mu = 5(4 - \kappa).$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι υπάρχουν πέντε πιθανές τιμές για το κ :

- Αν $\kappa = 0$ τότε $6\lambda + 3\mu = 20$
- Αν $\kappa = 1$ τότε $6\lambda + 3\mu = 15$
- Αν $\kappa = 2$ τότε $6\lambda + 3\mu = 10$
- Αν $\kappa = 3$ τότε $6\lambda + 3\mu = 5$
- Αν $\kappa = 4$ τότε $6\lambda + 3\mu = 0$

Επειδή ο αριθμός $6\lambda + 3\mu$ είναι πολλαπλάσιο του 3, οι αποδεκτές τιμές είναι $\kappa = 1$ και $\kappa = 4$.

Για $\kappa = 1$ από την ισότητα $6\lambda + 3\mu = 15 \Leftrightarrow 2\lambda + \mu = 5$ βρίσκουμε τις λύσεις $(\lambda, \mu) = (0, 5)$ ή $(1, 3)$ ή $(2, 1)$. Για $\kappa = 4$ βρίσκουμε τη λύση $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Επομένως οι τύποι των κορυφών είναι

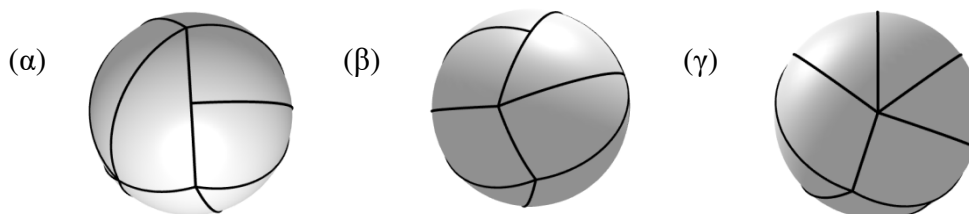
$$4A, A + 2B + \Gamma, A + B + 3\Gamma, A + 5\Gamma.$$

Από την ανάλυση που προηγήθηκε διαπιστώσαμε ότι ικανοποιούνται οι αναγκαίες συνθήκες για να υπάρχει ομοεδρική πλακόστρωση της σφαίρας με τον περιορισμό πλευρά με πλευρά που θα έχει ως πρότυπο το σφαιρικό τρίγωνο με γωνίες $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\right)$, ωστόσο αποδεικνύεται [7] ότι μια τέτοια πλακόστρωση δεν μπορεί να γίνει.

Αν παραλείψουμε τον περιορισμό πλευρά με πλευρά μπορούμε να βρούμε μια πλακόστρωση της σφαίρας με το συγκεκριμένο τρίγωνο. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δύο κορυφές που βρίσκονται στο μέσο μιας ακμής και οι γωνίες που συναντιούνται έχουν άθροισμα π (Σχήμα 7(α)).

Υπάρχουν τέσσερις κορυφές τύπου $1 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{3\pi}{5} + 1 \cdot \frac{3\pi}{10}$ (Σχήμα 7(β)) και

δύο κορυφές τύπου $1 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \frac{3\pi}{5} + 3 \cdot \frac{3\pi}{10}$ (Σχήμα 7(γ)).



Σχήμα 7

Επίλογος

Η γεωμετρία της σφαίρας είναι μια μη ευκλείδεια γεωμετρία και η μελέτη της προάγει τη λογική-μαθηματική σκέψη, ενώ ταυτόχρονα καλλιεργεί δεξιότητες αφαιρετικής σκέψης. Επιπλέον, η χωρική αντίληψη και η κατανόηση των τρισδιάστατων επιφανειών αναπτύσσει τη γεωμετρική σκέψη. Με τις πλακοστρώσεις της σφαίρας που παρουσιάστηκαν σε αυτή την εργασία δίνεται η δυνατότητα να προβληθούν ορισμένες διαφορές ανάμεσα στη σφαιρική και την ευκλείδεια γεωμετρία. Παράλληλα, το

αισθητικό αποτέλεσμα μπορεί να ελκύσει το ενδιαφέρον του αναγνώστη και να κάνει πιο ευχάριστη την εξερεύνηση ορισμένων ιδιοτήτων της σφαιρικής γεωμετρίας.

Βιβλιογραφία

1. D.M.Y. Sommerville, *Division of space by congruent triangles and tetrahedra*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 43 (1924), 85–116.
2. Y. Ueno, Y. Agaoka, *Classification of tilings of the 2-dimensional sphere by congruent triangles*, Hiroshima Math. J. 32.3, (2002) 463–540.
3. R. Dawson, *An isosceles triangle that tiles the sphere in exactly three ways*, Discrete and Computational Geometry 30 (2003) 459–466.
4. A. Breda, J. Dos Santos, *Spherical geometry and spherical tilings with Geogebra*, Journal for Geometry and Graphics, 22.2 (2018) 283–299.
5. M. A. Whittlesey, *Spherical geometry and its applications*, CRC Press (2020).
6. Y. Ueno, Y. Agaoka, *Tilings of the 2-dimensional sphere by congruent right triangles*, Mem. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ. Ser. IV, 22 (1996), 1–23.
7. R. J. MacG. Dawson, *Single-split tilings of the sphere with right triangles*, Discrete Geometry, Pure Appl. Math. 253, Marcel Dekker, (2003) 207–214.