Μια χαρακτηριστική άσκηση της Γ΄ (ρευστά) τροποποιημένη για τη Β΄ (οριζόντια βολή)

Λεπτή σανίδα κρατιέται οριζόντια με σχοινιά, των οποίων μπορούμε να μεταβάλλουμε το μήκος, από οροφή που βρίσκεται σε ύψος H = 4 m από το έδαφος. Πάνω στη σανίδα τοποθετούμε μικρό σώμα μάζας m = 1 kg , σε απόσταση από το δεξί άκρο της όσο είναι το μήκος των σχοινιών. Ασκούμε στο σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F = 10 N μέχρι το δεξί άκρο της σανίδας και το σώμα κινείται χωρίς τριβές πάνω σ' αυτήν.

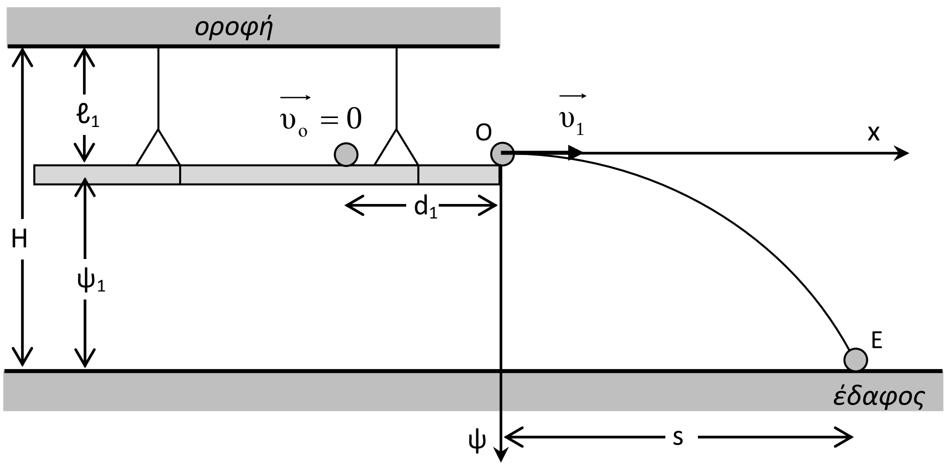
Α) Αν το μήκος των σχοινιών είναι $\ell_1 = 0{,}8$ m, να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας υ_1 με την οποία το σώμα εγκαταλείπει τη σανίδα.

Β) Πόση είναι η οριζόντια απόσταση s του σώματος από το άκρο της σανίδας, όταν φτάνει στο έδαφος;

Γ) Σε ποιο ύψος από το έδαφος ψ_2 πρέπει να βρίσκεται η σανίδα, ώστε το σώμα να πέσει στο ίδιο σημείο του εδάφους, με δεδομένο πάλι ότι κινείται πάνω στη σανίδα για απόσταση όσο το μήκος των σχοινιών και ότι ασκούμε την ίδια δύναμη;

Δ) Σε ποιο ύψος από το έδαφος ψ πρέπει να βρίσκεται η σανίδα, ώστε το σώμα να πέσει στο έδαφος στη μεγαλύτερη δυνατή οριζόντια απόσταση από το άκρο της σανίδας, με δεδομένο πάντα ότι κινείται στη σανίδα για $d = \ell$ και ότι ασκούμε την ίδια δύναμη;

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10$ m/s^2.



Λύση:

Α) Για την κίνηση του σώματος στη σανίδα, από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας έχουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_w + W_N \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - 0 = Fd_1 + 0 + 0 \Rightarrow \upsilon_1^2 = \frac{2Fd_1}{m} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2Fd_1}{m}} \quad (1).$$

Επειδή $d_1 = \ell_1$ έχουμε $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2F\ell_1}{m}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 0{,}8}{1}}\ \frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{16}\ \frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1 = 4\ \frac{m}{s}$.

Β) Μόλις εγκαταλείπει τη σανίδα το σώμα κάνει οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$.

Με την αρχή των αξόνων στο σημείο βολής O, οι εξισώσεις στους δυο άξονες είναι:

Άξονας x: $\upsilon_x = \upsilon_1$ (2) Άξονας ψ: $\upsilon_\psi = gt$ (4)

$x = \upsilon_1 t$ (3) $\psi = \frac{1}{2}gt^2$ (5)

Όταν φτάνει στο έδαφος (σημείο Ε), η κατακόρυφη απομάκρυνση γίνεται $\psi = \psi_1$ και η οριζόντια απομάκρυνση $x = s$ οπότε από την (5) έχουμε $\psi_1 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\psi_1}{g}}$

και από την (3) $\Rightarrow s = \upsilon_1\sqrt{\frac{2\psi_1}{g}}$ (6).

Επειδή $\psi_1 = H - \ell_1$ βρίσκουμε

$$s = \upsilon_1\sqrt{\frac{2(H-\ell_1)}{g}} \Rightarrow s = 4\sqrt{\frac{2(4-0{,}8)}{10}}\ m \Rightarrow s = 4\sqrt{0{,}64}\ m \Rightarrow s = 3{,}2\ m.$$

Γ) Όταν η σανίδα βρίσκεται σε ύψος ψ_2 από το έδαφος, το μήκος των σχοινιών είναι $\ell_2 = H - \psi_2$.

Η (1) γίνεται $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2Fd_2}{m}} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2F\ell_2}{m}} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2F(H-\psi_2)}{m}}$

και η (6) γίνεται $s = \upsilon_2\sqrt{\frac{2\psi_2}{g}}$.

Αντικαθιστώντας τη υ_2 στην τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$s = \sqrt{\frac{2F(H-\psi_2)}{m}}\sqrt{\frac{2\psi_2}{g}} \Rightarrow s^2 = \frac{2F(H-\psi_2)2\psi_2}{mg} \Rightarrow mgs^2 = 4FH\psi_2 - 4F\psi_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4F\psi_2^2 - 4FH\psi_2 + mgs^2 = 0 \Rightarrow 40\psi_2^2 - 160\psi_2 + 102{,}4 = 0 \Rightarrow \psi_2^2 - 4\psi_2 + 2{,}56 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 16 - 4 \cdot 2{,}56 = 5{,}76$

και οι δυο λύσεις $\psi_2 = \frac{4+\sqrt{5{,}76}}{2} = 3{,}2$ m που συμπίπτει με την ψ_1

και $\psi_2 = \frac{4-\sqrt{5{,}76}}{2} = 0{,}8$ m, που είναι το ζητούμενο ύψος.

Δ) Έστω ότι η σανίδα βρίσκεται σε ύψος ψ. Τότε είναι $\ell = H - \psi$ και παρόμοια με τα προηγούμενα έχουμε

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2F\ell}{m}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2F(H-\psi)}{m}} \quad \text{και } s = \upsilon\sqrt{\frac{2\psi}{g}}.$$

Αντικαθιστώντας πάλι τη υ στην τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$s = \sqrt{\frac{2F(H-\psi)}{m}}\sqrt{\frac{2\psi}{g}} \Rightarrow s^2 = \frac{2F(H-\psi)2\psi}{mg} \Rightarrow mgs^2 = 4FH\psi - 4F\psi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4F\psi^2 - 4FH\psi + mgs^2 = 0 \Rightarrow 40\psi^2 - 160\psi + 10s^2 = 0 \Rightarrow 4\psi^2 - 16\psi + s^2 = 0 \quad (7)$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 256 - 16s^2$.

Για να είναι πραγματικές οι λύσεις της εξίσωσης πρέπει

$\Delta \geq 0 \Rightarrow 256 - 16s^2 \geq 0 \Rightarrow 16s^2 \leq 256 \Rightarrow s^2 \leq 16 \Rightarrow s \leq 4$,

επομένως η μεγαλύτερη δυνατή οριζόντια απόσταση από το άκρο της σανίδας είναι $s_{max} = 4$ m (όσο το ύψος Η).

Αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε

$4\psi^2 - 16\psi + 16 = 0 \Rightarrow \psi^2 - 4\psi + 4 = 0 \Rightarrow (\psi - 2)^2 = 0 \Rightarrow \psi = 2$ m,

δηλαδή έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή οριζόντια απόσταση από το άκρο της σανίδας στο μισό του ύψους Η.