ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
25 ΜΑΪΟΥ 2012
Λύσεις

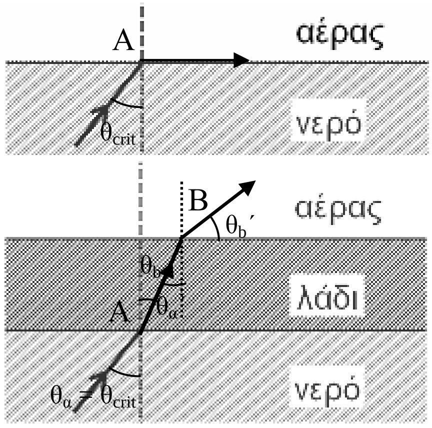
ΘΕΜΑ Α

Α1. γ
Α2. β
Α3. γ
Α4. γ
Α5. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. γ.
Για την πρόσπτωση της ακτίνας στη διαχωριστική επιφάνεια νερού – αέρα υπό γωνία θ_{crit} ισχύει

$ημθ_{crit} = \dfrac{1}{n_v}$ (1).



Όταν ρίξουμε το στρώμα του λαδιού, επειδή $n_λ > n_v$ η ακτίνα στο λάδι θα πλησιάσει την κάθετο. Από το νόμο του Snell για το σημείο Α έχουμε: $n_v\, ημθ_{crit} = n_λ\, ημθ_b \Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} n_v \dfrac{1}{n_v} = n_λ\, ημθ_b \Rightarrow$

$\Rightarrow ημθ_b = \dfrac{1}{n_λ}$ (2).

Η κρίσιμη γωνία για την πρόσπτωση της ακτίνας στην επιφάνεια λαδιού – αέρα είναι $ημθ_{crit}' = \dfrac{1}{n_λ}$ (3).

Πρέπει αυτή να συγκριθεί με την γωνία πρόσπτωσης στο σημείο Β $θ_α'$. Αυτή ισούται με την $θ_b$ (εντός εναλλάξ), οπότε, λόγω της (2)

είναι $ημθ_α' = \dfrac{1}{n_λ}$ (4). Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι

$ημθ_α' = ημθ_{crit}'$ και επειδή οι γωνίες οξείες $θ_α' = θ_{crit}'$. Άρα η ακτίνα θα κινηθεί παράλληλα στην επιφάνεια λαδιού-αέρα.

Αλλιώς μετά τη (2):
Από το νόμο του Snell για το σημείο Β έχουμε $n_λ\, ημθ_α' = ημθ_b'$ (3).
Όμως $θ_α' = θ_b$ (εντός εναλλάξ), οπότε

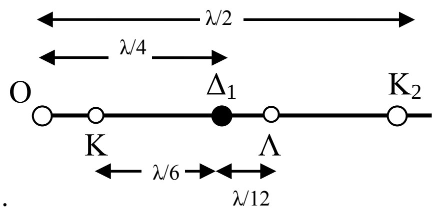
(2) $\Rightarrow ημθ_α' = \dfrac{1}{n_λ}$.

Άρα (3) $\Rightarrow n_λ \dfrac{1}{n_λ} = ημθ_b' \Rightarrow$

$\Rightarrow ημθ_b' = 1 \Rightarrow θ_b' = 90^o$.

Β2. α.
Το πλάτος είναι

$A' = 2A\left|συν2π\dfrac{x}{λ}\right|$ (1)



Οι θέσεις των δεσμών είναι

$x_Δ = (2κ+1)\dfrac{λ}{4}$, κ = 0,1,2, …

και του πρώτου δεσμού, για κ = 0: $x_{Δ1} = \dfrac{λ}{4}$.

Η θέση του σημείου Κ είναι $x_κ = \dfrac{λ}{4} - \dfrac{λ}{6} \Rightarrow x_κ = \dfrac{λ}{12}$.

και η θέση του σημείου Λ είναι $x_Λ = \dfrac{λ}{4} + \dfrac{λ}{12} = \dfrac{λ}{3}$.

Από την (1) βρίσκουμε το πλάτος του Κ $A_K' = 2A\left|συν2π\dfrac{λ/12}{λ}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow A_K' = 2A\left|συν\dfrac{π}{6}\right| \Rightarrow A_K' = 2A\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_K' = \sqrt{3}\,A$ και πλάτος του Λ $A_Λ' = 2A\left|συν2π\dfrac{(λ/4)+(λ/12)}{λ}\right| \Rightarrow A_Λ' =$

$= 2A\left|συν(\dfrac{π}{2}+\dfrac{π}{6})\right| \Rightarrow A_Λ' = 2A\left|-ημ\dfrac{π}{6}\right| \Rightarrow A_Λ' = 2A\dfrac{1}{2} \Rightarrow A_Λ' = A.$

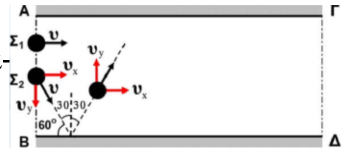
Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης είναι $υ = ω A'$.

Έτσι έχουμε $\dfrac{υ_K}{υ_Λ} = \dfrac{ωA'_K}{ωA'_Λ} \Rightarrow \dfrac{υ_K}{υ_Λ} = \dfrac{\sqrt{3}A}{A} \Rightarrow \dfrac{υ_K}{υ_Λ} = \sqrt{3}$.

B3. α.

Για τη σφαίρα $Σ_1$ ισχύει $ΑΓ = υt_1$ (1).

Η σφαίρα $Σ_2$ έχει σταθερή ταχύτητα παράλληλη με τους τοίχους $υ_x$, επειδή οι κρούσεις είναι ελαστικές και δεν δεχεται δύναμη σ’ αυτή τη διεύθυνση, όπου $υ_x = υ\,συν60^0 \Rightarrow υ_x = \dfrac{υ}{2}$.



Επομένως για τη συνιστώσα της κίνησης που είναι παράλληλη με τους τοίχους ισχύει $ΑΓ = \dfrac{υ}{2}t_2$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $υt_1 = \dfrac{υ}{2}t_2 \Rightarrow t_2 = 2\,t_1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ροπή αδράνειας της δοκού, ως προς τον άξονα περιστροφής στο άκρο του, σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner είναι $I_o = I_{CM} +$

$+M\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_o = \dfrac{1}{12}M\ell^2 + \dfrac{1}{4}M\ell^2 \Rightarrow I_o = \dfrac{4}{12}M\ell^2 \Rightarrow I_o = \dfrac{1}{3}M\ell^2$.

Για τη σφαίρα η ροπή αδράνειας είναι $I_σ = m\ell^2$.

Συνολικά για το σύστημα δοκός – σφαίρα $I = \dfrac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{3}M\ell^2 + \dfrac{1}{2}M\ell^2 \Rightarrow I = \dfrac{5}{6}M\ell^2 \Rightarrow I = \dfrac{5}{6}6 \cdot 0{,}3^2\ Kg \cdot m^2$

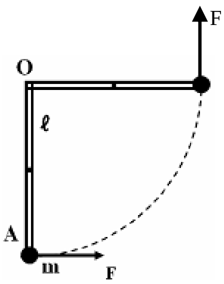
$\Rightarrow I = 5 \cdot 0{,}09\ Kg \cdot m^2 \Rightarrow I = 0{,}45\ Kg \cdot m^2$.

Γ2. Επειδή η ροπή της δύναμης F είναι σταθερή ισχύει: $W_F = τ_F \cdot θ$

όπου $τ_F = F \cdot \ell$. Επόμένως

$W_F = F \cdot \ell \cdot \dfrac{π}{2} \Rightarrow W_F = \dfrac{120}{π} \cdot 0{,}3 \cdot \dfrac{π}{2} J \Rightarrow$

$\Rightarrow W_F = 18$ J.



Γ3. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας με $ω_o = 0$ έχουμε $ΔK = ΣW \Rightarrow$

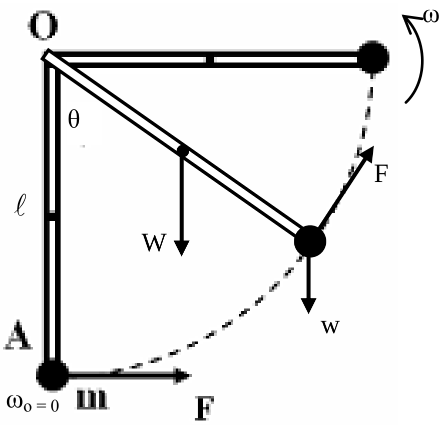
$K_{αρχ} + W_F + W_W + W_w = K_{τελ}$

$\Rightarrow 0 + W_F - Mg\dfrac{\ell}{2} - mg\ell =$

$= \dfrac{1}{2}Iω^2 \Rightarrow 18 - 6 \cdot 10 \cdot \dfrac{0{,}3}{2} -$

$- 3 \cdot 10 \cdot 0{,}3 = \dfrac{1}{2}0{,}45\ ω^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 - 9 - 9 = \dfrac{1}{2}0{,}45\ ω^2 \Rightarrow ω = 0.$



(Εγινε δεκτή και αρχική ταχύτητα $ω_o$, οπότε το αποτέλεσμα είναι $ω = ω_o$).

Γ4. Με την τιμή της F΄ γίνεται ανακύκλωση και θα προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα επ’ άπειρον. Αν περιοριστούμε πάλι στην κίνηση μέχρι την οριζόντια θέση έχουμε:

Αλλιώς το Β3.

Επειδή η $Σ_2$ κάνει διαδοχικές ανακλάσεις στον τοίχο, υπό γωνία 30^o, λόγω ελαστικών κρούσεων και ισχύει $ΑΓ = α_1 + β_1 + γ_1 +$ $+ δ_1 + ε_1$, χρησιμοποιώντας τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται έχουμε

$ΑΓ = α\,συν60^o + β\,συν60^o + γ\,συν60^o +$

$+ δ\,συν60^o + ε\,συν60^o \Rightarrow$

$\Rightarrow ΑΓ = (α + β + γ + δ + ε)\,συν60^o \Rightarrow$

$\Rightarrow α + β + γ + δ + ε = 2\,ΑΓ$, δηλαδή το συνολικό μήκος (s) της τροχιάς του $Σ_2$ είναι διπλάσιο από το συνολικό μήκος (ΑΓ) της τροχιάς του $Σ_1$. (Εξάλλου είναι εύκολο να δείξουμε χρησιμοποιώντας τη διεύθυνση της υ της $Σ_2$ όπως δείχνει το σχήμα, ότι για το συνολικό μήκος της τροχιάς του είναι

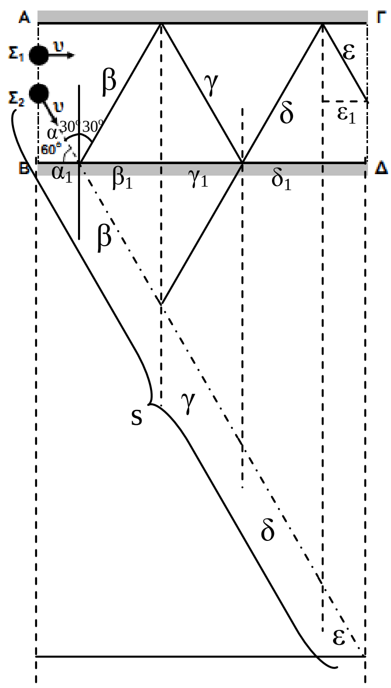
$ημ30^o = \dfrac{ΑΓ}{s} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{ΑΓ}{s} \Rightarrow s = 2\,ΑΓ$).

Επειδή στις ελαστικές κρούσεις με τοίχο, το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό και με δεδομένο ότι η διάρκεια των κρούσεων είναι αμελητέα, ισχύει $s = υ\,t_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,ΑΓ = υ\,t_2$ (1)

Για τη $Σ_1$ είναι $ΑΓ = υ\,t_1$, οπότε

(1) $\Rightarrow 2\,υ\,t_1 = υ\,t_2 \Rightarrow t_2 = 2\,t_1$.



Αλλιώς το Γ2.

Είναι $W_F = F \cdot s \Rightarrow W_F = F \cdot \dfrac{π}{2}\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow W_F = \dfrac{120}{π} \cdot \dfrac{π}{2} \cdot 0{,}3 J \Rightarrow W_F = 18$ J.

Αλλιώς το Γ4:

Σε τυχαία θέση ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

$\dfrac{dK}{dt} = Στ \cdot ω$.

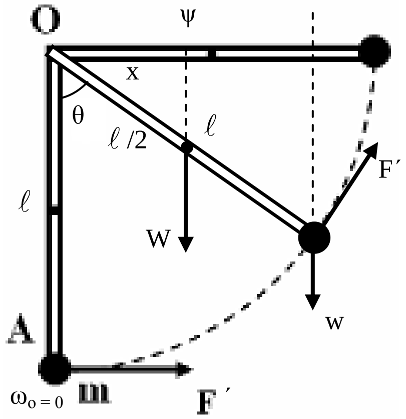
Η κινητική ενέργεια, άρα και η γωνιακή ταχύτητα ω γίνεται μέγιστη τη στιγμή που η συνισταμένη ροπή από ομόρροπη της ω, προκαλώντας επιταχυνόμενη στροφική κίνηση γίνεται αντίρροπη της ω, προκαλώντας επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Δηλαδή τη στιγμή που η συνισταμένη ροπή αλλάζει πρόσημο, οπότε η τιμή της είναι μηδέν. Άρα

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \tau_{F'} + \tau_W + \tau_w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F'\ell - Wx - w\psi = 0$ (1)

Είναι $\eta\mu\theta = \dfrac{x}{\ell/2} \Rightarrow x = \dfrac{\ell}{2}\eta\mu\theta$

και $\eta\mu\theta = \dfrac{\psi}{\ell} \Rightarrow \psi = \ell\,\eta\mu\theta$. Άρα



(1) $\Rightarrow F'\ell - Mg\dfrac{\ell}{2}\eta\mu\theta\ -$

$- mg\ell\,\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F' = \dfrac{M}{2}g\eta\mu\theta + \dfrac{M}{2}g\eta\mu\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow F' = Mg\eta\mu\theta \Rightarrow 30\sqrt{3} = 6 \cdot 10\eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60^o$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

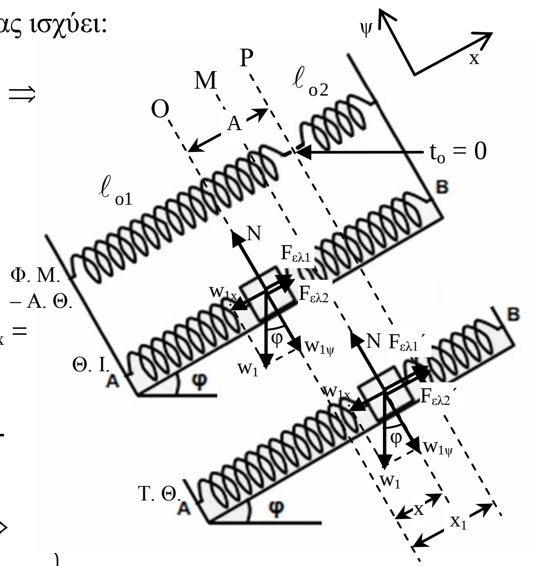
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1} + F_{\varepsilon\lambda 2} - w_{1x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1x_1 + k_2x_1 -$

$- m_1g\eta\mu\varphi = 0$ (1).

Σε τυχαία με απομάκρυνση x, η συνισταμένη δύναμη είναι



$\Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda 1}' + F_{\varepsilon\lambda 2}' - w_{1x} =$

$= k_1(x_1 - x) + k_2(x_1 - x) -$

$- m_1g\eta\mu\varphi =$

$= k_1x_1 - k_1x + k_2x_1 - k_2x -$

$- m_1g\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Sigma F_x = -k_1x - k_2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\Sigma F = -(k_1 + k_2)x \\ \text{της μορφής } \Sigma F = -Dx\end{array}\right\} \Rightarrow$ Άρα Α.Α.Τ. με $D = k_1 + k_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 60\dfrac{N}{m} + 140\dfrac{N}{m} \Rightarrow D = 200\dfrac{N}{m}$.

Δ2. Η σχέση της απομάκρυνσης είναι $x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$ (2). Το σώμα στην αρχή δεν έχει ταχύτητα, επομένως η αρχική του θέση είναι η ακραία θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης. Αυτό σημαίνει ότι $x_1 = A$ και από την (1) βρίσκουμε

(1) $\Rightarrow 60A + 140A - 2 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow 200A = 10 \Rightarrow A = 0{,}05$m.

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{200}}\,s \Rightarrow T = 0{,}2\pi\ s$

και η γωνιακή ταχύτητα $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{0{,}2\pi}\dfrac{rad}{s} \Rightarrow \omega = 10\dfrac{rad}{s}$.

Η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη όταν

$\dfrac{dK}{dt} = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Sigma\tau \cdot \omega = 0 \Rightarrow \Sigma\tau = 0$.

(Η συνέχεια είναι ίδια με δίπλα).

<u>Αλλιώς το Γ4:</u>

Έχουμε K_{max} όταν η γωνιακή ταχύτητα ω γίνεται μέγιστη, δηλαδή όταν γίνεται μέγιστη η στροφορμή L = Iω. Αυτό συμβαίνει όταν $\dfrac{dL}{dt} = 0$ και επειδή

$\dfrac{dL}{dt} = \Sigma\tau$ όταν $\Sigma\tau = 0$.

(Η συνέχεια είναι ίδια με δίπλα).

<u>Αλλιώς το Γ4:</u>

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση μέχρι μια τυχαία θέση, στην οποία το σύστημα σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο, για να βρούμε τη σχέση Κ(φ). Με με $\omega_o = 0$ έχουμε

$K_{\alpha\rho\chi} + W_F + W_W + W_w = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 + W_F - MgH - mgh = K \Rightarrow$

$\Rightarrow F\ell\varphi - Mg\dfrac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) -$

$- \dfrac{M}{2}g\ell\ (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = K \Rightarrow$

$\Rightarrow F\ell\varphi - Mg\ell\ (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = K \Rightarrow$

$\Rightarrow 30\sqrt{3} \cdot 0{,}3\,\varphi - 6 \cdot 10 \cdot 0{,}3\,(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) =$

$= K \Rightarrow K = 9\sqrt{3}\,\varphi - 18 + 18\,\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Η κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη όταν $\dfrac{dK}{d\varphi} = 0$. Για τη γωνία θ εκείνη τη στιγμή είναι $9\sqrt{3} + 18(-\eta\mu\theta) = 0$

$\Rightarrow 9\sqrt{3} = 18\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \eta\mu\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 60^o$.

Αλλιώς για τη γωνιακή ταχύτητα:

$D = m_1\omega^2 \Rightarrow 200 = 2\omega^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^2 = 100 \Rightarrow \omega = 10\dfrac{rad}{s}$.

Επειδή τη χρονική στιγμή μηδέν, το σώμα βρίσκεται στη θέση x = +A, θα υπάρχει αρχική φάση, που υπολογίζεται ως εξής:
Από τη (2) για t = 0 και x = +A έχουμε

(2) $\Rightarrow$ A = A ημφ_o $\Rightarrow$ ημφ_o = 1 $\Rightarrow$ $\varphi_o = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, με κ = 0,1,2,…

$\overset{0\le\varphi_o<2\pi}{\underset{\kappa=0}{\Rightarrow}}$ $\varphi_o = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

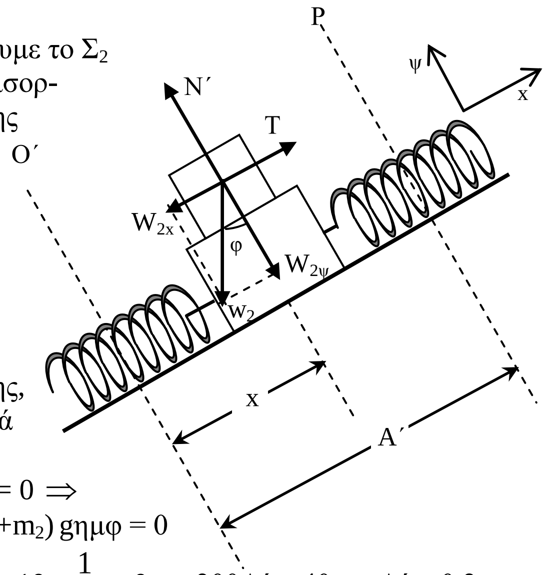
Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x = 0{,}05\eta\mu(10t + \dfrac{\pi}{2})$ (SI).

Δ3. Η νέα περίοδος της ταλάντωσης για το σύστημα των δυο σωμάτων είναι $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{D}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{8}{200}}\ s \Rightarrow$

$\Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{4}{100}}\ s \Rightarrow T' = 2\pi\ \dfrac{2}{10}\ s \Rightarrow T' = 0{,}4\pi\ s$ και η νέα γωνιακή ταχύτητα $\omega' = \dfrac{2\pi}{T'} \Rightarrow \omega' = \dfrac{2\pi}{0{,}4\pi}\dfrac{rad}{s} \Rightarrow \omega' = 5\dfrac{rad}{s}$.

Επομένως η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι $D_2 = m_2\,\omega'^2 \Rightarrow D_2 = 6\cdot 5^2\ \dfrac{N}{m} \Rightarrow D_2 = 150\dfrac{N}{m}$.

Δ4. Όταν τοποθετήσουμε το Σ_2 πάνω στο Σ1, η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης θα αλλάξει, οπότε θα αλλάξει και το πλάτος της ταλάντωσης που θα κάνει το σύστημα των δύο σωμάτων.



Στη νέα θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, παρόμοια με την παλιά ισχύει: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda 1} + F_{\varepsilon\lambda 2} - w_{o\lambda(x)} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k_1A' + k_2A' - (m_1+m_2)\,g\eta\mu\varphi = 0$

$\Rightarrow 60A' + 140A' - 8\cdot 10\cdot \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow 200A' = 40 \Rightarrow A' = 0{,}2$ m.

Για να μην ολισθαίνει το Σ_2 σε σχέση με το Σ_1 πρέπει $T \le T_{o\rho}$ (3).
Για να βρούμε την οριακή τριβή εφαρμόζουμε για το Σ_2
$\Sigma F_\psi = 0 \Rightarrow N' - w_{2\psi} = 0 \Rightarrow N' = m_2\,g\sigma\upsilon\nu\theta$, οπότε είναι
$T_{o\rho} = \mu_{o\rho} N' \Rightarrow T_{o\rho} = \mu_{o\rho}\, m_2\, g\sigma\upsilon\nu\varphi$ (4).
Για να βρούμε την T εφαρμόζουμε σε τυχαία θέση του θετικού ημιάξονα για το Σ_2 τη συνθήκη
$\Sigma F_x = -D_2x \Rightarrow T - w_{2x} = -D_2x \Rightarrow T = m_2\,g\eta\mu\varphi - D_2x$ (5).
Η μέγιστη τριβή που αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι για x = - A′, δηλαδή (5) $\Rightarrow T_{max} = m_2\,g\eta\mu\varphi + D_2A'$

$\Rightarrow T_{max} = 6\cdot 10\dfrac{1}{2} + 150\cdot 0{,}2 \Rightarrow T_{max} = 30 + 30 \Rightarrow T_{max} = 60$ N.

Η συνθήκη (3) πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές τριβής μέχρι τη μέγιστη, οπότε (3) $\Rightarrow T_{max} \le T_{o\rho} \Rightarrow T_{max} \le \mu_{o\rho} m_2\, g\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow 60 \le \mu_{o\rho}\cdot 6\cdot 10\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 30\sqrt{3}\ \mu_{o\rho} \ge 60 \Rightarrow \mu_{o\rho} \ge \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_{o\rho} \ge \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mu_{o\rho(min)} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

<u>Αλλιώς το Δ3</u>
Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του συστήματος είναι
$D = (m_1+m_2)\,\omega'^2 \Rightarrow 200 = 8\,\omega'^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega'^2 = 25 \Rightarrow \omega' = 5\dfrac{rad}{s}$. *

Επομένως η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι

$D_2 = m_2\,\omega'^2 \Rightarrow D_2 = 6\cdot 5^2\ \dfrac{N}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow D_2 = 150\dfrac{N}{m}$.

* Μπορεί να γίνει η διαίρεση κατά μέλη $\dfrac{k_1+k_2}{D_2} = \dfrac{m_1+m_2}{m_2}$ αντί για υπολογισμό του ω′.

<u>Αλλιώς μετά την (5)</u>
(3) $\Rightarrow m_2\,g\eta\mu\varphi - D_2x \le \mu_{o\rho}\, m_2\, g\sigma\upsilon\nu\theta$

$\Rightarrow \mu_{o\rho}\cdot 6\cdot 10\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ge 6\cdot 10\dfrac{1}{2} - 150\,x$

$\Rightarrow \mu_{o\rho}\, 30\sqrt{3} \ge 30 - 150\,x$ (6)

Η ανίσωση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε θέση της ταλάντωσης, δηλαδή για κάθε x. Η τιμή του x που μεγιστοποιεί το δεύτερο μέλος της ανίσωσης είναι x = - A′ = - 0,2 m, οπότε

(6) $\Rightarrow \mu_{o\rho}\, 30\sqrt{3} \ge 30 - 150\,(-0{,}2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 30\sqrt{3}\ \mu_{o\rho} \ge 60 \Rightarrow \mu_{o\rho} \ge \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_{o\rho} \ge \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mu_{o\rho(min)} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.