<u>Λύσεις</u>

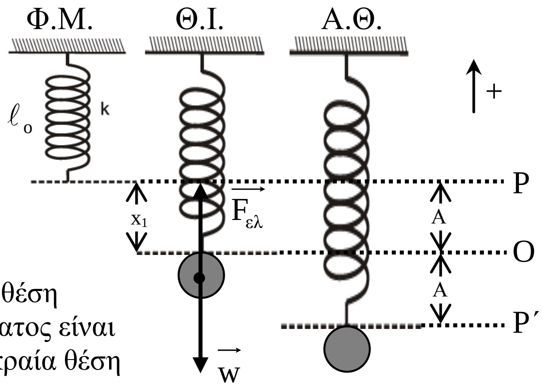
ΘΕΜΑ Α

Α1. δ)
Α2. γ)
Α3. α)
Α4. δ)
Α5. α. Λ   β. Σ   γ. Σ   δ. Σ   ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. ii.

Στη θέση ισορροπίας, με θετική φορά προς τα πάνω είναι $\Sigma F = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow kx_1 = mg \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = \dfrac{mg}{k}$.



Επειδή στην αρχική θέση η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν, αυτή είναι ακραία θέση της ταλάντωσης, επομένως το πλάτος είναι $A = x_1 = \dfrac{mg}{k}$.

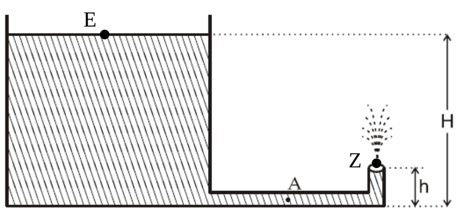
Μέγιστη δυναμική ενέργεια ελατηρίου $U_{\varepsilon\lambda} = \dfrac{1}{2}kx^2$ έχουμε στη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου που είναι $x_{max} = 2A$, στην κάτω ακραία θέση.

Άρα $U_{\varepsilon\lambda(max)} = \dfrac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = \dfrac{1}{2}k(2A)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = 2kA^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = 2k\dfrac{m^2g^2}{k^2} \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda(max)} = \dfrac{2m^2g^2}{k}$.

Β2. iii.

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Bernoulli για τα σημεία Ε και Ζ.



$P_E + \rho gH + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_E^2 =$

$= P_Z + \rho gh + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_Z^2$.

Είναι $P_E = P_Z = P_{\alpha\tau\mu}$ και $\upsilon_E = 0$, οπότε έχουμε

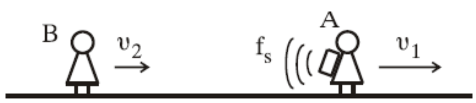
$\rho gH = \rho gh + \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_Z^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\rho\upsilon_Z^2 = \rho gH - \rho gh \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_Z^2 = 2(g5h - gh) \Rightarrow \upsilon_Z = \sqrt{2\cdot 4gh} \Rightarrow \upsilon_Z = 2\sqrt{2gh}$.

Επειδή ο σωλήνας είναι σταθερής διατομής ($A_A = A_Z$), από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε
$\Pi_A = \Pi_Z \Rightarrow A_A \cdot \upsilon_A = A_Z \cdot \upsilon_Z \Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon_A = 2\sqrt{2gh}$.

Από την εξίσωση του Torricelli είναι:
$\upsilon_Z = \sqrt{2g(H-h)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon_Z = \sqrt{2g(5h-h)} \Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon_Z = \sqrt{2g\cdot 4h} \Rightarrow \upsilon_Z = 2\sqrt{2gh}$.
Επειδή ο σωλήνας είναι σταθερής διατομής ($A_A = A_Z$), από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε
$A_A \cdot \upsilon_A = A_Z \cdot \upsilon_Z \Rightarrow \upsilon_A = 2\sqrt{2gh}$.

Β3. ii.



Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Β είναι: $f_B = \dfrac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_2}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_1} f_s \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_B = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}}{\upsilon_{\eta\chi} + \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{5}} f_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_B = \frac{\frac{11\upsilon_{\eta\chi}}{10}}{\frac{6\upsilon_{\eta\chi}}{5}} f_s \Rightarrow f_B = \frac{11\cdot 5}{10\cdot 6} f_s \Rightarrow f_B = \frac{11}{12} f_s.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το χρονικό διάστημα Δt για μετάβαση από την κάτω στην πάνω ακραία θέση είναι μισή περίοδος, δηλαδή $\Delta t = \dfrac{T}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = 2\ \Delta t \Rightarrow T = 2 \cdot 0{,}4$ s $\Rightarrow T = 0{,}8$ s.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι

$\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon = \dfrac{0{,}04}{0{,}4}\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = 0{,}1\dfrac{m}{s}$.

Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \upsilon T \Rightarrow \lambda = 0{,}1 \cdot 0{,}8$ m $\Rightarrow \lambda = 0{,}08$ m.

Για το πλάτος ταλάντωσης λαμβάνουμε την E_T σαν μέγιστη κινητική ενέργεια, δηλαδή $E_T = \dfrac{1}{2}\Delta m\ \upsilon_{max}^2 = \dfrac{1}{2}\Delta m\ \omega^2 A^2$ (1).

Είναι $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0{,}8}\dfrac{rad}{s} = \dfrac{20\pi}{8}\dfrac{rad}{s} = \dfrac{5\pi}{2}\dfrac{rad}{s}$,

οπότε (1)$\Rightarrow$ $E_T = \dfrac{1}{2}\Delta m\ \omega^2 A^2 \Rightarrow 5\pi^2\ 10^{-7} = \dfrac{1}{2}\ 10^{-6}\ \dfrac{25\pi^2}{4} A^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{5\cdot 10^{-7}\cdot 8}{25\cdot 10^{-6}} = A^2 \Rightarrow A^2 = \dfrac{4}{25}\ m^2 \Rightarrow A = \dfrac{2}{5}$ m $\Rightarrow A = 0{,}4$ m.

Μετά την ταχύτητα:

Συχνότητα $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}8} = \dfrac{5}{4}$ Hz = 1,25 Hz,

$\upsilon = \lambda f \Rightarrow 0{,}1 = \lambda\ \dfrac{5}{4} \Rightarrow \lambda = 0{,}08$ m.

Είναι $E_T = \dfrac{1}{2} DA^2$ (1)

όπου $D = \Delta m\ \omega^2 = 10^{-6} \cdot \dfrac{25\pi^2}{4}\dfrac{N}{m} =$

$= \dfrac{25}{4}\pi^2\ 10^{-6}\ \dfrac{N}{m}$, οπότε

(1) $\Rightarrow E_T = \dfrac{1}{2} DA^2 \Rightarrow 5\pi^2\ 10^{-7} =$

$= \dfrac{1}{2}\ \dfrac{25}{4}\pi^2\ 10^{-6} A^2 \Rightarrow A = 0{,}4$ m.

Γ2. Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι $\psi = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

$\Rightarrow \psi = 0{,}4\ \eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{0{,}8} - \dfrac{x}{0{,}08}\right) \Rightarrow \psi = 0{,}4\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{5t}{4} - \dfrac{25x}{2}\right)$ (S.I.)

$\psi = 0{,}4\ \eta\mu 2\pi(1{,}25t - 12{,}5x) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \psi = 0{,}4\ \eta\mu(2{,}5\pi t - 25\pi x)$ (S.I.)

[Για το στιγμιότυπο βρίσκουμε πρώτα την απομάκρυνση της πηγής τη χρονική στιγμή $t_1 = 1{,}4$ s. Για x = 0 και $t_1 = 1{,}4$ s

(2) $\Rightarrow \psi_1 = 0{,}4\ \eta\mu\ 2\pi\dfrac{7}{4} = 0{,}4\ \eta\mu\ \dfrac{7\pi}{2} = 0{,}4\ \eta\mu\ \dfrac{3\pi}{2} = -\ 0{,}4$ m.]

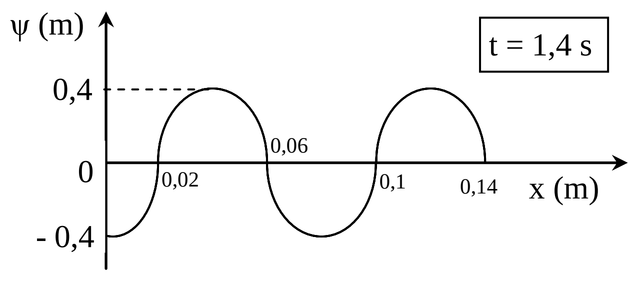
Το κύμα τη συγκεκριμένη στιγμή έφτασε σε

$x_1 = \upsilon t_1 = 0{,}1 \cdot 1{,}4$ m $= 0{,}14$ m.

Τα μήκη κύματος σε αυτή την απόσταση είναι

$N = \dfrac{x_1}{\lambda} = \dfrac{0{,}14}{0{,}08} = \dfrac{14}{8} = 1{,}75$ μήκη κύματος.

Το στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γ3. Από την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση της στοιχειώδους μάζας Δm έχουμε

$K + U = E_T \Rightarrow$

$\Rightarrow K = E_T - U \Rightarrow K = E_T - \frac{1}{2}D\psi^2 \Rightarrow K = E_T - \frac{1}{2}\Delta m\, \omega^2\, \psi^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 5\pi^2\, 10^{-7} - \frac{1}{2}\, 10^{-6}\, \frac{25\pi^2}{4}\, 0{,}2^2 \text{ J} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 5\pi^2\, 10^{-7} - 10^{-7}\, \frac{10\pi^2}{8} \text{ J} \Rightarrow K = \frac{30\pi^2}{8}\, 10^{-7} \text{ J} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 3{,}75\, \pi^2\, 10^{-7}$ J.

Γ4. Για το σημείο Ρ είναι $\psi_P = A\ \eta\mu\varphi_P \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}4\ \eta\mu\varphi_P \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta\mu\varphi_P = 1 \Rightarrow \varphi_P = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

Άρα $\varphi_P - \varphi_\Sigma = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi_\Sigma = \varphi_P - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi_\Sigma = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_\Sigma = 2\kappa\pi - \pi$.

Από την εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Σ έχουμε:

$\upsilon_\Sigma = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\varphi_\Sigma \Rightarrow \upsilon_\Sigma = \omega A\ \sigma\upsilon\nu\varphi_\Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_\Sigma = \frac{5\pi}{2}\, 0{,}4\ \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi - \pi) \Rightarrow \upsilon_\Sigma = \frac{5\pi}{2}\, 0{,}4\ \sigma\upsilon\nu(-\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_\Sigma = \pi\ \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \upsilon_\Sigma = -\pi \frac{m}{s}$.

<u>Αλλιώς:</u>

Είναι $\upsilon_\Sigma = \omega A\ \sigma\upsilon\nu\varphi_\Sigma = \omega A\ \sigma\upsilon\nu(\varphi_P - \frac{3\pi}{2}) =$

$= \omega A\ \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi_P) = -\omega A\ \eta\mu(\pi - \varphi_P) = -\omega A\ \eta\mu\varphi_P =$

$= -\omega\, \psi_P = -2{,}5\pi \cdot 0{,}4$ m/s $= -\pi$ m/s.

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ]

Είναι $\upsilon = \pm\, \omega \sqrt{A^2 - \psi^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = \pm \frac{5\pi}{2} \sqrt{0{,}4^2 - 0{,}2^2}\ \frac{m}{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = \pm \frac{5\pi}{2} \sqrt{0{,}16 - 0{,}04}\ \frac{m}{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = \pm \frac{5\pi}{2} \sqrt{0{,}12}\ \frac{m}{s}$ και

$K = \frac{1}{2}\Delta m\, \upsilon^2 = \frac{1}{2}\, 10^{-6}\, \frac{25\pi^2}{4}\, 0{,}12 \text{ J} \Rightarrow$

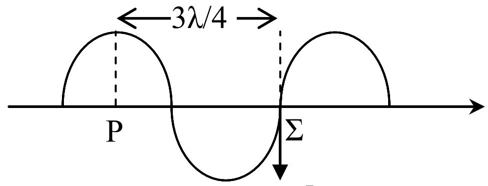
$\Rightarrow K = \frac{3\pi^2}{8}\, 10^{-6} \text{ J} = 0{,}375\, \pi^2\, 10^{-6}$ J.

Είναι $\varphi_P - \varphi_\Sigma = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3\pi}{2} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta x = \frac{3\lambda}{4}$.

Επειδή το σημείο Ρ έχει μεγαλύτερη φάση από το Σ, βρίσκεται πιο κοντά στην πηγή $x = 0$, δηλαδή $x_P < x_\Sigma$.

Με $\psi_P = +A$, για το Σ είναι $\psi_\Sigma = 0$, δηλαδή βρίσκεται στη θέση ισορροπίας με αρνητική ταχύτητα.



Άρα $\upsilon_\Sigma = -\upsilon_{max} = -\omega A = -\frac{5\pi}{2}\, 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_\Sigma = -\pi \frac{m}{s}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για την κίνηση του δίσκου (σύνθετη ομαλά επιταχυνόμενη) έχουμε, με θετική τη φορά της κίνησης:

$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow w - T_1 = m\alpha \Rightarrow mg - T_1 = m\alpha$ (1)

και με δεδομένο ότι $\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$

$\Sigma\tau = I_{CM}\, \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 R = \frac{1}{2} mR^2\, \frac{\alpha}{R} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} m\alpha$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε

(1) + (2) $\Rightarrow mg - T_1 + T_1 = m\alpha + \frac{1}{2} m\alpha \Rightarrow mg = \frac{3}{2} m\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{2g}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{20}{3}\ \frac{m}{s^2}$.

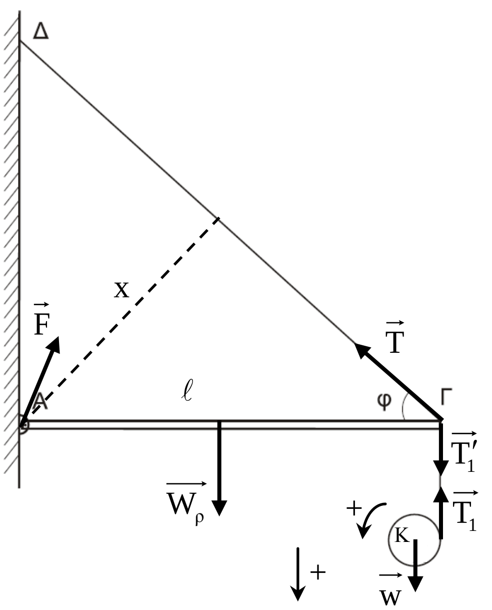
Δ2. Είναι $T_1' = T_1$ λόγω του αξιώματος δράσης αντίδρασης και επειδή το νήμα είναι αβαρές, οπότε

(2) $\Rightarrow T_1' = \frac{1}{2} 2 \cdot \frac{20}{3}$ N $\Rightarrow T_1' = \frac{20}{3}$ N.

Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε

$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow \tau_F + \tau_{W_\rho} + \tau_{T_1'} + \tau_T = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 - W_\rho \frac{\ell}{2} - T_1'\,\ell + T\,x = 0 \Rightarrow -Mg\frac{\ell}{2} - T_1'\,\ell + T\,\ell\,\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow$

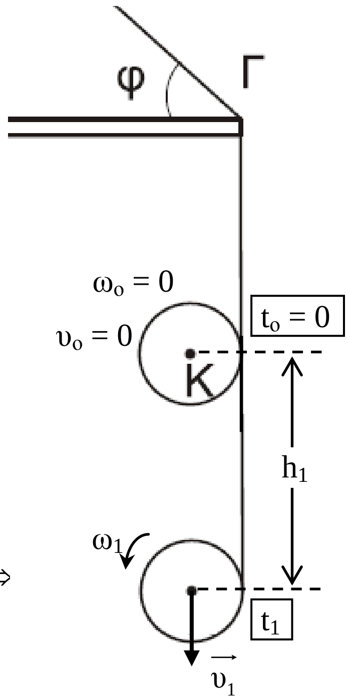


$\Rightarrow T \cdot 0{,}8 = \dfrac{40}{2} + \dfrac{20}{3} \Rightarrow T \cdot 0{,}8 = \dfrac{80}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \dfrac{100}{3}$ N.

Δ3. Η κίνηση του δίσκου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα και ισχύουν:

$\upsilon = \alpha t$ (3), $\psi = \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ (4).



Για τη χρονική στιγμή t_1 που κόβεται το νήμα (4) $\Rightarrow h_1 = \dfrac{1}{2}\alpha\, t_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}3 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{20}{3}\, t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = 0{,}09 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = 0{,}3$ s

και (3) $\Rightarrow \upsilon_1 = \alpha t_1 = \dfrac{20}{3}\, 0{,}3 \dfrac{m}{s} = 2\dfrac{m}{s}$.

Για τη γωνιακή ταχύτητα είναι

$\upsilon_1 = \omega_1 R \Rightarrow \omega_1 = \dfrac{\upsilon_1}{R} \Rightarrow \omega_1 = \dfrac{2}{0{,}1}\,\dfrac{rad}{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_1 = 20\dfrac{rad}{s}$

και για τη στροφορμή $L_1 = I_{CM}\,\omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_1 = \dfrac{1}{2} mR^2\, \omega_1 \Rightarrow L_1 = \dfrac{1}{2} 2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 20 \text{ kg}\dfrac{m^2}{s} \Rightarrow L_1 = 0{,}2 \text{ kg}\dfrac{m^2}{s}$.

Από τη στιγμή που θα κοπεί το νήμα και μετά ασκείται μόνο το βάρος που δεν ασκεί ροπή. Επομένως μετά από οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt δεν αλλάζει η γωνιακή ταχύτητα (ομαλή στροφική κίνηση) και η στροφορμή και θα είναι $L = 0{,}2 \text{ kg}\dfrac{m^2}{s}$.

Δ4. Τη στιγμή που κόβεται το νήμα οι ταχύτητες είναι $\upsilon_1 = 2\dfrac{m}{s}$ και $\omega_1 = 20\dfrac{rad}{s}$. Στη συνέχεια ασκείται μόνο το βάρος που δεν ασκεί ροπή και η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, οπότε μετά από χρονικό διάστημα Δt΄ η γωνιακή ταχύτητα θα είναι

$\omega_2 = 20\dfrac{rad}{s}$. Η μεταφορική κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση g.

Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης είναι

$K_{\pi\varepsilon\rho} = \dfrac{1}{2} I_{CM}\, \omega_2^2 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} mR^2\omega_2^2 = \dfrac{1}{4} 2 \cdot 0{,}01 \cdot 400 \text{ J} = 2 \text{ J}$.

Η μεταφορική κίνηση του τροχού είναι κατακόρυφη βολή προς τα κάτω και για την ταχύτητά του μετά από χρόνο Δt΄ είναι:

$\upsilon_2 = \upsilon_1 + g\,\Delta t' = 2 + 10 \cdot 0{,}1 = 2 + 1 = 3\,\dfrac{m}{s}$.

Η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης είναι

$K_{\mu\varepsilon\tau} = \dfrac{1}{2} m\upsilon_2^2 = \dfrac{1}{2} 2 \cdot 9 \text{ J} = 9 \text{ J}$.

Ο ζητούμενος λόγος είναι $\dfrac{K_{\pi\varepsilon\rho}}{K_{\mu\varepsilon\tau}} = \dfrac{2}{9}$.

<u>Αλλιώς το ω_1:</u>

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\alpha}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{20/3}{0{,}1}\,\dfrac{rad}{s^2} \Rightarrow$

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{200}{3}\,\dfrac{rad}{s^2}$ και

$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu}\, t_1 \Rightarrow \omega_1 = \dfrac{200}{3}\, 0{,}3 \dfrac{rad}{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_1 = 20\dfrac{rad}{s}$.

<u>Αλλιώς μέχρι το ω_1:</u>

Από την Α.Δ.Μ.Ε., με $U_\beta = 0$ στη θέση του κέντρου μάζας τη στιγμή που κόβεται το νήμα έχουμε:

$E_{M(\alpha\rho\chi)} = E_{M(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow$

$\Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\beta(\alpha\rho\chi)} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\beta(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 + mgh_1 = \dfrac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \dfrac{1}{2} I_{CM}\, \omega_1^2 + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow mgh_1 = \dfrac{1}{2} m\omega_1^2 R^2 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} mR^2\omega_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow gh_1 = \dfrac{3}{4}\, \omega_1^2 R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \cdot 0{,}3 = \dfrac{3}{4}\, \omega_1^2\, 0{,}01 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_1^2 = 400 \Rightarrow \omega_1 = 20\,\dfrac{rad}{s}$.