

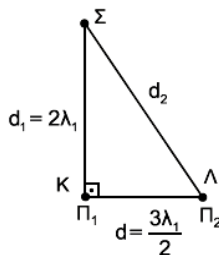
ΘΕΜΑ Α

- A1. γ)
 A2. δ)
 A3. α)
 A4. δ)
 A5. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. i.

Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΣ και έχουμε



$$d_2^2 = d_1^2 + d^2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{(2\lambda_1)^2 + \left(\frac{3\lambda_1}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 = \sqrt{4\lambda_1^2 + \frac{9\lambda_1^2}{4}} \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{25\lambda_1^2}{4}} \Rightarrow d_2 = \frac{5\lambda_1}{2}.$$

Όταν θα διπλασιαστεί η συχνότητα ταλαντώσεων των δύο πηγών, αφού η ταχύτητα διάδοσης παραμένει αμετάβλητη θα έχουμε: $v = \lambda_1 f_1$ και $v = \lambda_2 f_2$, οπότε $\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow \lambda_1 f_1 = \lambda_2 2f_1 \Rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2$. Στο σημείο Σ η διαφορά των αποστάσεων θα είναι:

$$d_2 - d_1 = \frac{5\lambda_1}{2} - 2\lambda_1 \Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{5\lambda_1}{2} - \frac{4\lambda_1}{2} \Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{2\lambda_2}{2} \Rightarrow d_2 - d_1 = \lambda_2,$$

της μορφής $d_2 - d_1 = \kappa \lambda_2$ (με $\kappa = 1$) δηλαδή η διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, οπότε το σημείο Σ θα είναι σημείο ενίσχυσης.

B2. iii.

Η ροπή της δύναμης F είναι μηδέν επειδή είναι πάνω στον άξονα περιστροφής. Δηλαδή είναι $\Sigma \tau_{εξ(K)} = 0$ και $\Delta L = 0$, άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της Στροφορμής: $L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\omega R^2 = m\omega' \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow \omega R^2 = \omega' \frac{R^2}{4} \Rightarrow \omega' = 4\omega.$$

Από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$W_F = \Delta K \Rightarrow W_F = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega'^2 - \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m \frac{R^2}{4} (4\omega)^2 - \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m 16 \omega^2 \frac{R^2}{4} - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = 2m \omega^2 R^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \Rightarrow W_F = \frac{3}{2} m \omega^2 R^2.$$

B3. i.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Γ και Δ και έχουμε $A_\Gamma \cdot v_\Gamma = A_\Delta \cdot v_\Delta \Rightarrow 2 A_\Delta \cdot v_\Gamma = A_\Delta \cdot v_\Delta \Rightarrow v_\Delta = 2 v_\Gamma$.

Στο σημείο Σ θα είναι $d_1 = 2 \lambda_1 = 2 \cdot 2\lambda_2 = 4 \lambda_2$ και

$$d_2 = \frac{5\lambda_1}{2} = \frac{5 \cdot 2\lambda_2}{2} = 5 \lambda_2$$

και το πλάτος ταλάντωσης είναι

$$A_\Sigma = 2A |\sin 2\pi \frac{d_2 - d_1}{2\lambda_2}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\Sigma = 2A |\sin \pi \frac{5\lambda_2 - 4\lambda_2}{\lambda_2}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\Sigma = 2A |\sin \pi| \Rightarrow A_\Sigma = 2A \text{ ενίσχυση.}$$

Η ροπή της δύναμης F είναι μηδέν επειδή είναι πάνω στον άξονα περιστροφής. Άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της Στροφορμής:

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow m v R = m v' \frac{R}{2} \Rightarrow v' = 2v.$$

Από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$W_F = \Delta K \Rightarrow W_F = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m (2v)^2 - \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2} 4v^2 - \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow W_F = \frac{3}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{3}{2} m (\omega R)^2 \Rightarrow W_F = \frac{3}{2} m \omega^2 R^2.$$

Από την εξίσωση του Bernoulli για μια φλέβα του υγρού για τα σημεία Γ και Δ έχουμε:

$$P_{\Gamma} + 0 + \frac{1}{2} \rho v_{\Gamma}^2 = P_{\Delta} + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_{\Delta}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\Gamma} - P_{\Delta} = \rho gh + \frac{1}{2} \rho 4v_{\Gamma}^2 - \frac{1}{2} \rho v_{\Gamma}^2 \Rightarrow \Delta p = \rho gh + \frac{3}{2} \rho v_{\Gamma}^2 \quad (1).$$

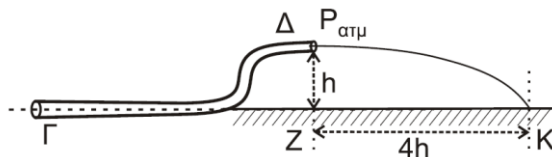
Από τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής $x = v_{\Delta}t$ και $\psi = \frac{1}{2} gt^2$ για το σημείο Κ ($x = 4h$, $\psi = h$) έχουμε:

$$4h = v_{\Delta}t \Rightarrow t = \frac{4h}{2v_{\Gamma}} \Rightarrow t = \frac{2h}{v_{\Gamma}} \quad \text{και} \quad h = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} g \left(\frac{2h}{v_{\Gamma}} \right)^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} g \frac{4h^2}{v_{\Gamma}^2} \Rightarrow 2 v_{\Gamma}^2 = 4gh \Rightarrow h = \frac{v_{\Gamma}^2}{2g}.$$

$$\text{Άρα (1)} \Rightarrow \Delta p = \rho g \frac{v_{\Gamma}^2}{2g} + \frac{3}{2} \rho v_{\Gamma}^2 \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \rho v_{\Gamma}^2 + \frac{3}{2} \rho v_{\Gamma}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{4}{2} \rho v_{\Gamma}^2 \Rightarrow \Delta p = 2\rho v_{\Gamma}^2.$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την ταλάντωση του m_1 .

Το m_1 αφήνεται από την ηρεμία και εκτελεί Α.Α.Τ. πλάτους $A = \Delta \ell = 0,4 \text{ m}$.

Η περίοδος της ταλάντωσής του είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{50}} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

$$\text{και η γωνιακή συχνότητά του } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2\pi/5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{50}{2}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega &= 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Η ταχύτητά λίγο πριν την κρούση, που γίνεται στη θέση ισορροπίας είναι

$$v_1 = \omega A \Rightarrow v_1 = 5 \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για την πλαστική κρούση:

Από την Αρχή Διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \Rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m v_1 = 2m v \Rightarrow v = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v = \frac{2}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Επομένως για τις συχνότητες έχουμε:

$$f_1 = \frac{v_{\eta\chi} - v_1}{v_{\eta\chi}} f_s, \quad f_2 = \frac{v_{\eta\chi} - v}{v_{\eta\chi}} f_s$$

και με διαίρεση κατά μέλη:

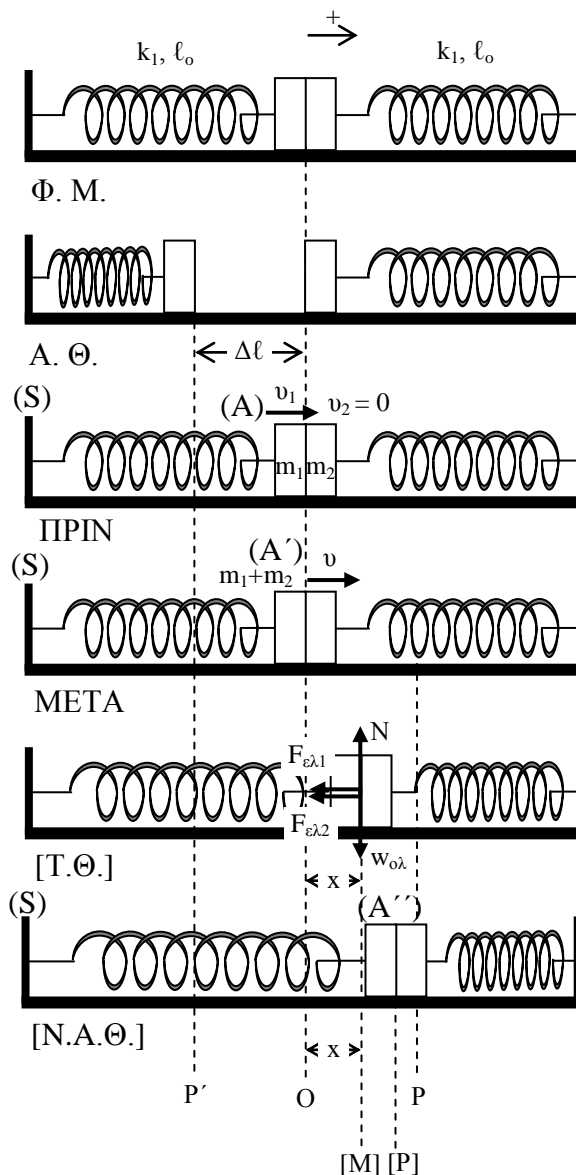
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v_{\eta\chi} - v_1}{v_{\eta\chi} - v} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{340 - 2}{340 - 1} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{338}{339}.$$

Γ2. Στη θέση του φυσικού μήκους είναι $\Sigma F_x = 0$, άρα αυτή είναι και η θέση ισορροπίας.

Σε τυχαία θέση του θετικού ημιάξονα είναι:

$$\Sigma F_x = -F_{ελ1} - F_{ελ2} = -k_1 x - k_2 x = -kx - kx \Rightarrow \Sigma F_x = -2kx$$

της μορφής $\Sigma F_x = -Dx$, άρα έχουμε Α.Α.Τ. με $D = 2k$.



Η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} \Rightarrow T' = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{2k}} \Rightarrow T' = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' = 2\pi \sqrt{\frac{2}{50}} \text{ s} \Rightarrow T' = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

και η γωνιακή συχνότητά του $\omega' = \frac{2\pi}{T'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{2\pi}{2\pi/5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega' = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος, που έχει ταχύτητα v στη θέση ισορροπίας, είναι:

$$v = \omega' A' \Rightarrow 1 = 5 A' \Rightarrow A' = 0,2 \text{ m.}$$

Γ3. Ο δέκτης καταγράφει $f_A = f_S$ όταν ακινητοποιείται για 1η φορά στη θετική ακραία θέση (δεξιά).

$$[f_A = f_S \Rightarrow \frac{v_{\eta\lambda} \pm v_{\text{συστ}}}{v_{\eta\lambda}} f_s = f_s \Rightarrow \frac{v_{\eta\lambda} \pm v_{\text{συστ}}}{v_{\eta\lambda}} = 1 \Rightarrow v_{\text{συστ}} = 0.]$$

$$\text{Άρα } \Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi/5}{4} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{20} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{10} \text{ s.}$$

Γ4. Είναι $\frac{dp}{dt} = \Sigma F$, οπότε $\left| \frac{dp}{dt} \right|_{\text{max}} = \Sigma F_{\text{max}}$.

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής γίνεται μέγιστο στις ακραίες θέσεις, δηλαδή

$$\left| \frac{dp}{dt} \right|_{\text{max}} = DA' \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\text{max}} = 2kA' \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\text{max}} = 2 \cdot 50 \cdot 0,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\text{max}} = 20 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}.$$

Για τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $D = (m_1 + m_2) \omega'^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2k = 2m \omega'^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{50}{2}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Στη θετική ακραία θέση είναι $x = A$, οπότε:

$$x = A \eta \mu \omega' t \Rightarrow A = A \eta \mu \omega' t \Rightarrow \eta \mu \omega' t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta \mu \omega' t = \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega' t = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

1η φορά έχουμε για $k = 0$:

$$\omega' t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 5t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{10} \text{ s.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το θεώρημα του Steiner για τη ράβδο έχουμε:

$$I_p = I_{\text{cm}(p)} + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{12} M \ell^2 + \frac{1}{4} M \ell^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{3} M \ell^2.$$

Άρα για το σύστημα ράβδου – δίσκου έχουμε:

$$I_{\text{συστ}} = I_p + I_{\text{cm}(\Delta)} \Rightarrow I_{\text{συστ}} = \frac{1}{3} M \ell^2 + \frac{1}{2} m_{\Delta} R_{\Delta}^2 \Rightarrow$$

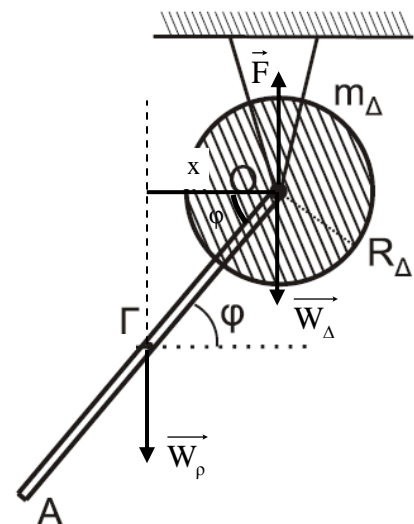
$$\Rightarrow I_{\text{συστ}} = \frac{1}{3} 8 \cdot 3^2 + \frac{1}{2} 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow I_{\text{συστ}} = 24 + 2 \frac{1}{2} \Rightarrow I_{\text{συστ}} = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος των δύο σωμάτων είναι:

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = \Sigma \tau_{(O)} \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = \tau_{W_p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = w_p x \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = Mg \frac{\ell}{2} \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = 8 \cdot 10 \cdot 1,5 \cdot 0,6 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = 72 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}.$$



Δ3. Από την Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας με $U_\beta = 0$ στο κέντρο μάζας της ράβδου, όταν αυτή είναι στην κατακόρυφη θέση έχουμε:

$$E_{M(\alpha\rho\chi)} = E_{M(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\beta(\alpha\rho\chi)} = K_{(\tau\epsilon\lambda)} + U_{\beta(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + Mg \left(\frac{\ell}{2} - \psi \right) = K_{(\tau\epsilon\lambda)} + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{(\tau\epsilon\lambda)} = Mg \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \eta\mu\phi \right) \Rightarrow K_{(\tau\epsilon\lambda)} = Mg \frac{\ell}{2} (1 - \eta\mu\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{(\tau\epsilon\lambda)} = 8 \cdot 10 \cdot 1,5 \cdot (1 - 0,8) \text{ J} \Rightarrow K_{(\tau\epsilon\lambda)} = 24 \text{ J}.$$

Δ4. Επειδή το νήμα είναι αβαρές έχουμε $T_1 = T_2 = T$.
 Η συνθήκη κύλισης για τον κύλινδρο είναι $a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
 Για το ανώτερο σημείο B του κυλίνδρου είναι

$$v_B = 2 v_{cm} \Rightarrow \frac{dv_B}{dt} = 2 \frac{dv_{cm}}{dt} \Rightarrow \alpha_B = 2 \alpha_{cm}$$

Για την τροχαλία είναι $a_H = \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau\rho)} R$
 και επειδή το νήμα είναι μη εκτατό έχουμε

$$v_H = v_B \Rightarrow \alpha_H = \alpha_B \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau\rho)} R = 2 \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau\rho)} = \frac{2 \alpha_{cm}}{R}.$$

Για την κίνηση του κυλίνδρου (σύνθετη ομαλά επιταχυνόμενη) με θετική τη φορά της κίνησης έχουμε:

$$\Sigma F_x = m a_{cm} \Rightarrow w_x - T_{\sigma\tau} - T = m a_{cm} \Rightarrow m g \eta\mu\phi - T_{\sigma\tau} - T = m a_{cm} \quad (1)$$

και

$$\Sigma \tau = I_{cm(\kappa)} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau} R - TR = \frac{1}{2} m R^2 \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_{\sigma\tau} - T = \frac{1}{2} m a_{cm} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε

$$(1) + (2) \Rightarrow m g \eta\mu\phi - T_{\sigma\tau} - T + T_{\sigma\tau} - T = m a_{cm} + \frac{1}{2} m a_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m g \eta\mu\phi - 2 T = \frac{3}{2} m a_{cm} \quad (3).$$

Για την τροχαλία με θετική τη φορά της κίνησης έχουμε:

$$\Sigma \tau = I_{cm(\tau\rho)} \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau\rho)} \Rightarrow T' R = I_{cm(\tau\rho)} \frac{2 \alpha_{cm}}{R} \Rightarrow 2 T' = 4 I_{cm(\tau\rho)} \frac{\alpha_{cm}}{R^2} \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow m g \eta\mu\phi - 2 T + 2 T' = \frac{3}{2} m a_{cm} + 4 I_{cm(\tau\rho)} \frac{\alpha_{cm}}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m g \eta\mu\phi = \left(\frac{3}{2} m + \frac{4 I_{cm(\tau\rho)}}{R^2} \right) \alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 \cdot 10 \cdot 0,8 = \left(\frac{3}{2} 30 + \frac{4 \cdot 1,95}{0,2^2} \right) \alpha_{cm} \Rightarrow 240 = 240 \alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = 1 \frac{m}{s^2}.$$

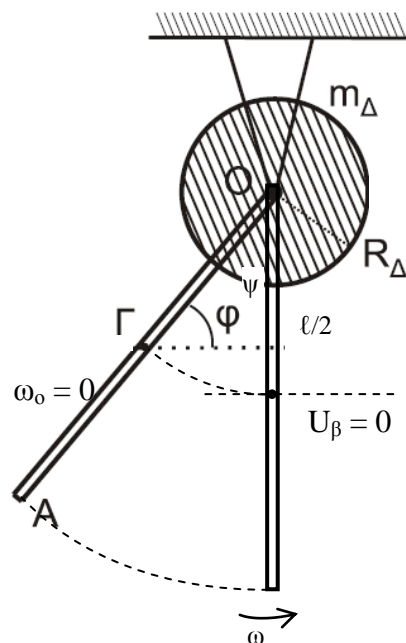
Για τον κύλινδρο οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$v_{cm} = \alpha_{cm} t \quad (5)$$

$$s = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 \quad (6).$$

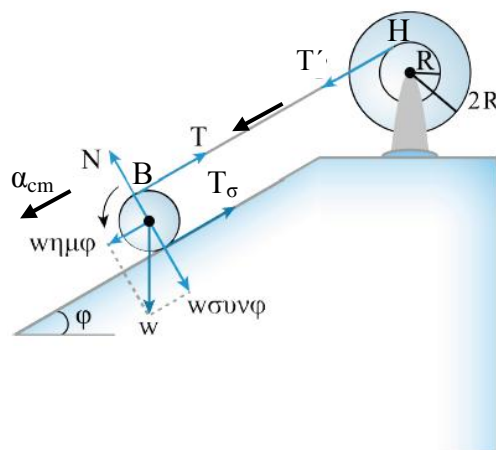
$$\text{Από (6)} \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} 1 t^2 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

$$\text{και από (5)} \Rightarrow v_{cm} = 1 \cdot 2 \frac{m}{s} \Rightarrow v_{cm} = 2 \frac{m}{s}.$$



$v_B = 2 v_{cm} = 2 \omega R \Rightarrow \alpha_B = 2 \alpha_{cm} = 2 \alpha_{\gamma\omega\nu} R$
 και επειδή το νήμα είναι μη εκτατό
 έχουμε

$$v_B = v_H = \omega_{\tau\rho} R \Rightarrow \alpha_B = \alpha_H = \alpha_{\gamma\omega\nu(\tau\rho)} R$$



ΘΜΚΕ για τον κύλινδρο, για διάστημα s:

$$K_{\alpha\rho\chi} + W_{\text{ολ}} = K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow 0 + \Sigma F_x \cdot s + \Sigma \tau \cdot \theta =$$

$$= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm(\kappa)} \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \alpha_{cm} \cdot s + I_{cm(\kappa)} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \theta =$$

$$= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \alpha_{cm} \cdot s + \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \cdot \frac{s}{R} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{4} m v_{cm}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \alpha_{cm} \cdot s + \frac{1}{2} m \alpha_{cm} \cdot s = \frac{3}{4} m v_{cm}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \alpha_{cm} \cdot s = \frac{3}{4} v_{cm}^2 \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{2 \alpha_{cm} s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{cm} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 2} \frac{m}{s} \Rightarrow v_{cm} = 2 \frac{m}{s}.$$