

**ΘΕΜΑ Α**

A1. β)

A2. γ)  $[v_{\max(1)} = \omega_1 A_1 = 2\pi f_1 A_1 = 2\pi (2f_2) \frac{A_2}{2} = 2\pi f_2 A_2 = v_{\max(2)}]$

A3. α)

A4. γ)  $[\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow A_1 d_1 = A_2 d_2 \Rightarrow A_1 d_1 = 3A_2 d_2 \Rightarrow d_1 = 3d_2]$

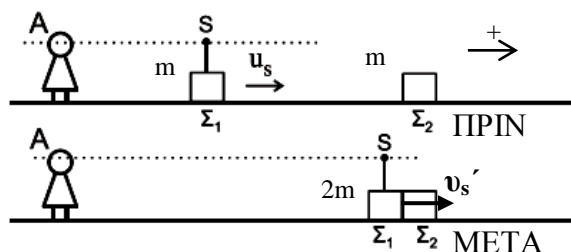
A5. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

B1. α) ii.

B) Πριν από την κρούση, για τη συχνότητα που

αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι  $f_1 = \frac{v_H}{v_H + v_s} f_s \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f_1 = \frac{v_H}{v_H + \frac{v_H}{20}} f_s \Rightarrow f_1 = \frac{v_H}{\frac{21v_H}{20}} f_s \Rightarrow f_1 = \frac{20}{21} f_s$  (1).



Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την πλαστική κρούση έχουμε:  $\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Rightarrow$

$\Rightarrow mv_s = 2m v_s' \Rightarrow v_s' = \frac{v_s}{2} \Rightarrow v_s' = \frac{v_H/20}{2} \Rightarrow v_s' = \frac{v_H}{40}$ .

Μετά την κρούση, για τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

$f_2 = \frac{v_H}{v_H + v_s'} f_s \Rightarrow f_2 = \frac{v_H}{v_H + \frac{v_H}{40}} f_s \Rightarrow f_2 = \frac{v_H}{\frac{41v_H}{40}} f_s \Rightarrow f_2 = \frac{40}{41} f_s$  (2).

Για τον λόγο των συχνοτήτων, έχουμε:  $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{20}{21} f_s}{\frac{40}{41} f_s} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{41 \cdot 20}{21 \cdot 40} \Rightarrow \boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{41}{42}}$

B2. α) iii.

β) Η πίεση στο σημείο Δ είναι:

$P_\Delta = P_{ατμ} + \rho gh$  (1), ενώ  $P_\Gamma = P_{ατμ}$ .

Από την εξίσωση της συνέχειας στον οριζόντιο σωλήνα είναι:  $P_\Delta = P_\Gamma \Rightarrow A_1 v_\Delta = A_2 v_\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow 2A_2 v_\Delta = A_2 v_\Gamma \Rightarrow v_\Delta = \frac{v_\Gamma}{2}$  (2).

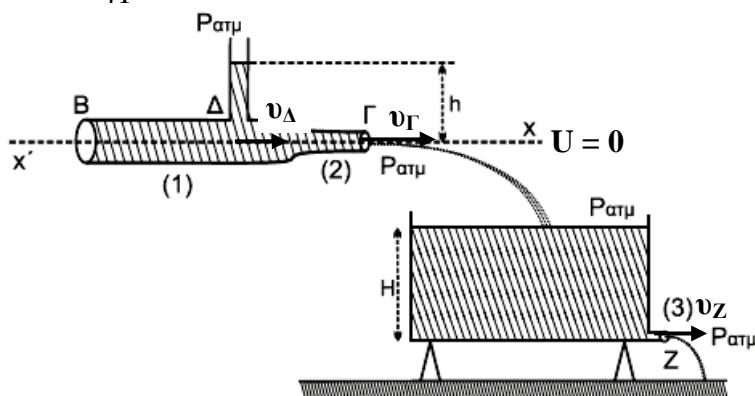
Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που περνάει από τα Δ και Γ, χρησιμοποιώντας ότι  $P_\Gamma = P_{ατμ}$ .

$P_\Delta + \frac{1}{2} \rho v_\Delta^2 = P_\Gamma + \frac{1}{2} \rho v_\Gamma^2 \xrightarrow{(1)} P_{ατμ} + \rho gh + \frac{1}{2} \rho \frac{v_\Gamma^2}{4} = P_{ατμ} + \frac{1}{2} \rho v_\Gamma^2 \Rightarrow gh = \frac{v_\Gamma^2}{2} - \frac{v_\Gamma^2}{8} \Rightarrow h = \frac{3v_\Gamma^2}{8g}$  (3).

Εφόσον η στάθμη του δοχείου παραμένει σταθερή, ο όγκος του νερού που εισέρχεται ανά μονάδα χρόνου

(παροχή) είναι ίσος με αυτόν που εξέρχεται, δηλ.  $P_\Gamma = P_Z \Rightarrow A_2 v_\Gamma = A_3 v_Z \Rightarrow A_2 v_\Gamma = \frac{A_2}{2} v_Z \Rightarrow v_Z = 2v_\Gamma$  (4).

Από το θεώρημα Torricelli για το δοχείο είναι:  $v_Z = \sqrt{2gH} \Rightarrow v_Z^2 = 2gH \Rightarrow H = \frac{v_Z^2}{2g} \xrightarrow{(4)} H = \frac{4v_\Gamma^2}{2g} \Rightarrow$



$$\Rightarrow H = \frac{2v_{\Gamma}^2}{g} \quad (5). \text{ Για τον ζητούμενο λόγο, με διαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε } \frac{(3)}{(5)} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{8g}{2v_{\Gamma}^2} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$$

B3. α) ii.

Β) Για την ΚΙΝΗΣΗ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ F εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας:  $W_F = \Delta K \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_F = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \tau_F \cdot \varphi = \frac{1}{2} I_{\rho} \omega^2 \Rightarrow F L \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M L^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\pi \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 9\pi^2 \Rightarrow \omega = 3\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ, από την Αρχή Διατήρησης της

Στροφορμής (ισχύει  $\Sigma \tau_{\text{εξ}} = 0$ ) έχουμε:  $L_{\text{ολ(αρχ)}} = L_{\text{ολ(τελ)}} \Rightarrow I_{\rho} \omega = (I_{\rho} + I_m) \omega' \Rightarrow$

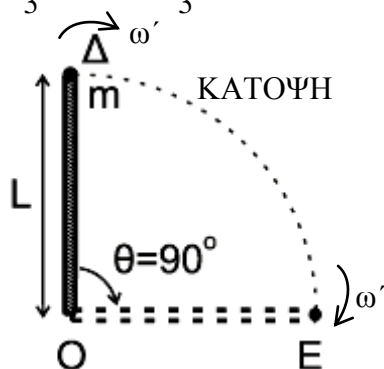
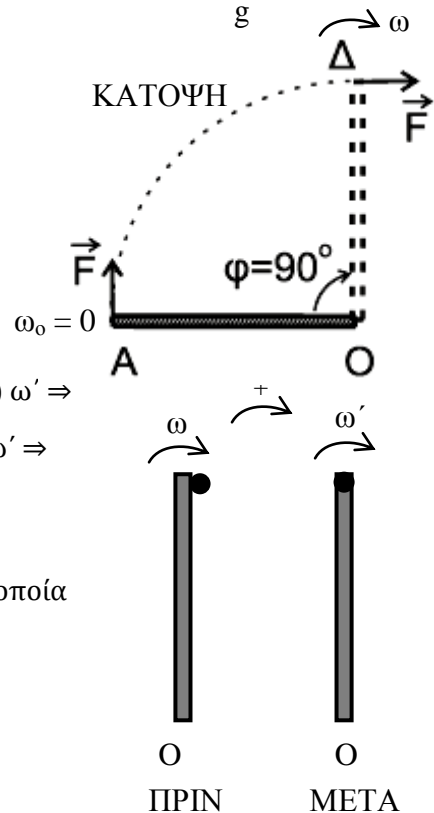
$$\Rightarrow \frac{1}{3} M L^2 \omega = \left( \frac{1}{3} M L^2 + m L^2 \right) \omega' \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 3\pi = \left( \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 \right) \omega' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\pi = 2\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{3\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την ΚΙΝΗΣΗ ΡΑΒΔΟΥ - m, η οποία είναι ομαλή στροφορική, έχουμε:

$$\theta = \omega' \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{3} \text{ s}$$



## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του  $\Sigma_1$  (Π.Θ.Ι.) έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ1}} - w_1 = 0 \Rightarrow k \Delta \ell = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,05 k = 1 \cdot 10 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος

(Ν.Θ.Ι.) έχουμε:  $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ1}} - w_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k x_2 = (m_1 + m_2) g \Rightarrow 200 x_2 = 2 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 0,1 \text{ m}$$

Επειδή το συσσωμάτωμα φτάνει μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους, η παραμόρφωση  $x_2$  είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσης, δηλαδή  $A = 0,1 \text{ m}$ .

Γ2. Η θέση της κρούσης είναι τυχαία θέση

(M) της ταλάντωσης, με  $x = x_2 - \Delta \ell = 0,1 - 0,05 = 0,05 \text{ m}$ .

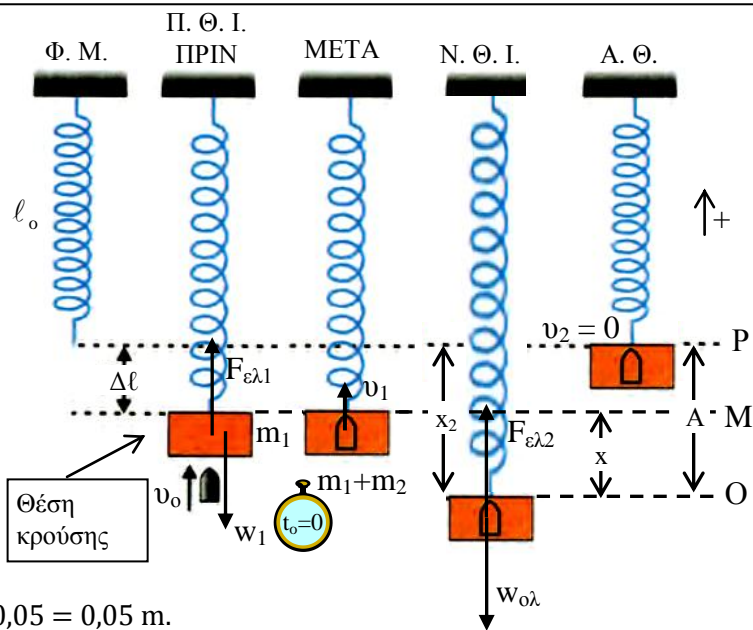
Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_1^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow 2 v_1^2 + 200 \cdot 0,05^2 = 200 \cdot 0,1^2 \Rightarrow 2 v_1^2 = 2 - 0,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 0,75 \Rightarrow v_1 = \pm \sqrt{0,75} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{3 \cdot 0,25} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 0,5 \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την πλαστική κρούση βρίσκουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ(αρχ)}} = \vec{p}_{\text{ολ(τελ)}} \Rightarrow m_2 v_0 + 0 = (m_1 + m_2) v_1 \Rightarrow v_0 = 2 \cdot 0,5 \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

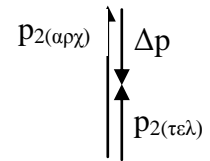


Άρα η κινητική ενέργεια του  $\Sigma_2$  πριν την κρούση είναι:  $K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}^2 \text{ J} \Rightarrow \boxed{K_2 = 1,5 \text{ J}}$ .

**Γ3.** Η μεταβολή της ορμής του  $\Sigma_2$ , με θετική φορά προς τα πάνω είναι:

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{τελ})} - \vec{p}_{2(\text{αρχ})} \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 v_1 - m_2 v_0 \Rightarrow \Delta p_2 = 1 \cdot 0,5 \sqrt{3} - 1 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p_2 = -0,5 \sqrt{3} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ και το μέτρο είναι } \boxed{|\Delta p_2| = 0,5 \sqrt{3} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$



Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι έχει κατεύθυνση προς τα κάτω.

**Γ4.** Η εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$x = A \eta \mu (\omega t + \varphi_0) \quad (1). \text{ Η περίοδος της ταλάντωσής του είναι } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{200}} \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \frac{1}{10} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s} \text{ και η κυκλική συχνότητά του } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi/5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Για  $t_0 = 0$  είναι  $x = +0,05 \text{ m}$ , οπότε έχουμε (1)  $\Rightarrow 0,05 = 0,1 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq \varphi_{\text{αρχ}} < 2\pi, k=0} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq \varphi_{\text{αρχ}} < 2\pi, k=0} \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Αλλιώς } \omega &= \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \\ &= \sqrt{\frac{200}{2}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Το συσσωμάτωμα όμως μετά την κρούση έχει τη θετική φορά, οπότε είναι  $v > 0$  και η δεκτή τιμή είναι

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad.} \quad \text{Τελικά έχουμε } \boxed{x = 0,1 \eta \mu \left( 10t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ (S.I.)}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Από την ισορροπία των σωμάτων έχουμε:

Ισορροπία σώματος  $\Sigma$ :  $\Sigma F = 0 \Rightarrow w_\Sigma - T_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_1 = M_\Sigma g \Rightarrow T_1 = 2 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N}.$$

Ισορροπία τροχαλίας:  $\Sigma \tau_{\text{cm}} = 0 \Rightarrow T_1 R_T - T_2 R_T = 0 \Rightarrow$

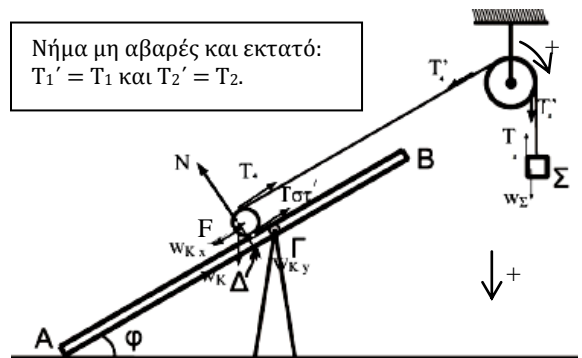
$$\Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow T_2 = 20 \text{ N}.$$

Ισορροπία κυλίνδρου:

$$\Sigma \tau_{\text{cm}} = 0 \Rightarrow T_2 R_K - T_\sigma R_K = 0 \Rightarrow T_\sigma = T_2 \Rightarrow T_\sigma = 20 \text{ N}.$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2 + T_\sigma - F - w_{Kx} = 0 \Rightarrow F = T_2 + T_\sigma - M_K g \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 20 + 20 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{F = 30 \text{ N}}$$



**Δ2.** Από τον Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής έχουμε:

Για το σώμα:  $\Sigma F = M_\Sigma \alpha \Rightarrow w_\Sigma - T_3 = M_\Sigma \alpha \quad (1)$

Για την τροχαλία:  $\Sigma \tau = I_T \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_3 R_T - T_4 R_T = \frac{1}{2} M_T R_T^2 \frac{\alpha}{R_T} \Rightarrow$

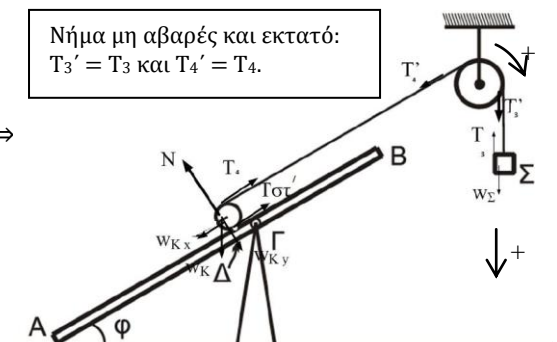
$$\Rightarrow T_3 - T_4 = \frac{1}{2} M_T \alpha \quad (2).$$

Τροχαλία:  $\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_T$   
Κύλινδρος:  $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_K$

Για τον κύλινδρο:

$$\Sigma F_x = M_K \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow T_4 + T_\sigma' - w_{Kx} = M_K \alpha_{\text{cm}} \quad (3)$$

$$\text{και } \Sigma \tau = I_K \alpha_{\gamma\omega\nu}' \Rightarrow T_4 R_K - T_\sigma' R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R_K} \Rightarrow T_4 - T_\sigma' = \frac{1}{2} M_K \alpha_{\text{cm}} \quad (4).$$



Με πρόσθεση κατά μέλη (3) + (4)  $\Rightarrow T_4 + T_\sigma' - M_K g \eta \mu \varphi + T_4 - T_\sigma' = M_K \alpha_{\text{cm}} + \frac{1}{2} M_K \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 T_4 - M_K g \eta \mu \phi = \frac{3}{2} M_K \alpha_{cm} \quad (5).$$

Επειδή το νήμα είναι μη εκτατό, στα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας και του κυλίνδρου έχουμε ίδιο μέτρο επιτάχυνσης  $\alpha$ . Στο ανώτερο σημείο του κυλίνδρου όμως είναι  $v = 2 v_{cm} \Rightarrow \alpha = 2 \alpha_{cm} \quad (6)$ ,

$$\text{οπότε από την (5)} \Rightarrow 2 T_4 - M_K g \eta \mu \phi = \frac{3}{2} M_K \frac{\alpha}{2} \Rightarrow T_4 - \frac{M_K g \eta \mu \phi}{2} = \frac{3}{8} M_K \alpha \quad (7).$$

$$\text{Με πρόσθεση κατά μέλη (1)+(2)+(7)} \Rightarrow M_{\Sigma g} - T_3 + T_3 - T_4 + T_4 - \frac{M_K g \eta \mu \phi}{2} = M_{\Sigma} \alpha + \frac{1}{2} M_T \alpha + \frac{3}{8} M_K \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 10 + \frac{2 \cdot 10 \cdot (1/2)}{2} = (2 + 1 + 0,75) \alpha \Rightarrow 15 = 3,75 \alpha \Rightarrow \alpha = 4 \frac{m}{s^2}.$$

$$\text{Για την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου βρίσκουμε (6)} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{2} \frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_{cm} = 2 \frac{m}{s^2}.$$

**Δ3.** Τη χρονική στιγμή  $t_1$  ο κύλινδρος έχει ταχύτητα:  $v_1 = \alpha_{cm} t_1 \Rightarrow v_1 = 2 \cdot 0,5 \frac{m}{s} \Rightarrow v_1 = 1 \frac{m}{s}$ .

Εκείνη τη στιγμή κόβουμε το νήμα, οπότε ο κύλινδρος κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση επιβραδυνόμενος. Για τη μεταφορική του κίνηση από τον Θ.Ν.Μ.  $\Sigma F_x = M_K \alpha_{cm}' \Rightarrow T - w_{Kx} = M_K \alpha_{cm}' \quad (8)$

Για την στροφική του κίνηση από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής έχουμε:

$$\Sigma \tau = I_K \alpha_{\gamma\omega\omega}'' \Rightarrow -T R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 \frac{\alpha_{cm}'}{R_K} \Rightarrow -T = \frac{1}{2} M_K \alpha_{cm}' \quad (9).$$

Κύλινδρος:  
 $\alpha_{cm}' = \alpha_{\gamma\omega\omega}'' R_K$

$$\text{Με πρόσθεση κατά μέλη (8) + (9)} \Rightarrow T - M_K g \eta \mu \phi - T = M_K \alpha_{cm}' + \frac{1}{2} M_K \alpha_{cm}' \Rightarrow -M_K g \eta \mu \phi = \frac{3}{2} M_K \alpha_{cm}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm}' = -\frac{2}{3} g \eta \mu \phi \Rightarrow \alpha_{cm}' = -\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_{cm}' = -\frac{10}{3} \frac{m}{s^2} \text{ και } |\alpha_{cm}'| = \frac{10}{3} \frac{m}{s^2}.$$

$$\text{Για την επιβραδυνόμενη κίνηση είναι } v_2 = v_1 - |\alpha_{cm}'| \Delta t \Rightarrow 0 = 1 - \frac{10}{3} \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0,3 \text{ s και τελικά}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = 0,5 + 0,3 \Rightarrow t_2 = 0,8 \text{ s.}$$

**Δ4.** Για την επιταχυνόμενη κίνηση είναι  $s_1 = \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 0,25 \text{ m}$ .

$$\text{Για την επιβραδυνόμενη κίνηση είναι } s_2 = v_1 \Delta t - \frac{1}{2} |\alpha_{cm}'| \Delta t^2 \Rightarrow s_2 = 1 \cdot 0,3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 0,3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_2 = 0,3 - 0,15 \Rightarrow s_2 = 0,15 \text{ m. Άρα } s_{ολ} = s_1 + s_2 \Rightarrow s_{ολ} = 0,25 + 0,15 \Rightarrow s_{ολ} = 0,4 \text{ m.}$$

**Δ5.** Θα βρούμε την απόσταση  $x$  από το σημείο  $\Gamma$  που πρέπει να βρίσκεται ο κύλινδρος, ώστε η σανίδα μόλις να ανατραπεί. Τότε θα είναι  $N_A = 0$  και στη σανίδα θα ασκούνται το βάρος της και η αντίδραση από τον κύλινδρο  $N' = N$ , με  $\Sigma F_{\psi} = 0 \Rightarrow N = M_K g \text{ συν} \phi$ .

Για τη σανίδα έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow -w_{\psi} \left( \frac{\ell}{2} - B\Gamma \right) + N' x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_K g \text{ συν} \phi x = M g \text{ συν} \phi (2 - 1,5) \Rightarrow x = 0,5 \text{ m.}$$

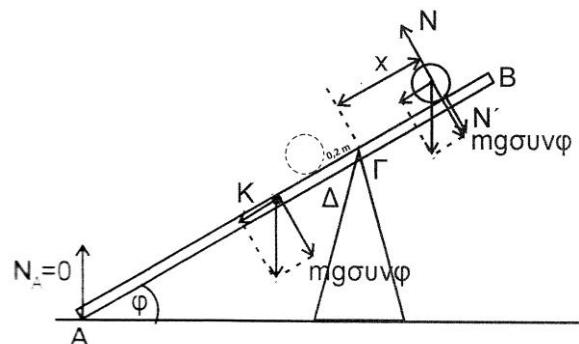
Ο κύλινδρος σταματάει σε απόσταση  $s_{ολ} - (\Gamma\Delta) = 0,4 - 0,2 = 0,2 \text{ m}$  από το σημείο  $\Gamma$ .

Επομένως, αφού  $x > 0,2 \text{ m}$  (στα οποία σταματάει ο κύλινδρος), η σανίδα δε θα ανατραπεί.

Άλλώς:

$$\text{Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε } \Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow N_A \text{ συν} \phi (A\Gamma) + M_K g \text{ συν} \phi x - M g \text{ συν} \phi (K\Gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_A \cdot (4 - 1,5) + 20x - 20 \cdot (2 - 1,5) = 0 \Rightarrow 2,5 N_A = 10 - 20x \Rightarrow N_A = 4 - 8x \text{ (S.I.)}$$



Για  $N_A = 0$  είναι  $4 = 8x \Rightarrow x = 0,5 \text{ m}$   
 και  $x > 0,2 \text{ m}$ , άρα όχι ανατροπή.

Για  $x = 0,4 - 0,2 = 0,2 \text{ m}$  (στα οποία σταματάει ο κύλινδρος),  
 είναι  $N_A = 4 - 8x = 4 - 1,6 = 2,4 \text{ N} > 0$ , υπάρχει επαφή.