ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2011

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σωστή η πρόταση **(γ)**

Α2. Σωστή η πρόταση **(β)**

Α3. Σωστή η πρόταση **(γ)**

Α4. Σωστή η πρόταση **(δ)**

Στην περίπτωση πάντως που διευκρινιζόταν για την ηχητική πηγή ότι: «*…όταν είναι ακίνητη, εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s και μήκους κύματος λ.*», τότε, θα ήταν σωστή η πρόταση **(γ)**

Α5. **α.** → **Σ**ωστό

β. → **Λ**άθος

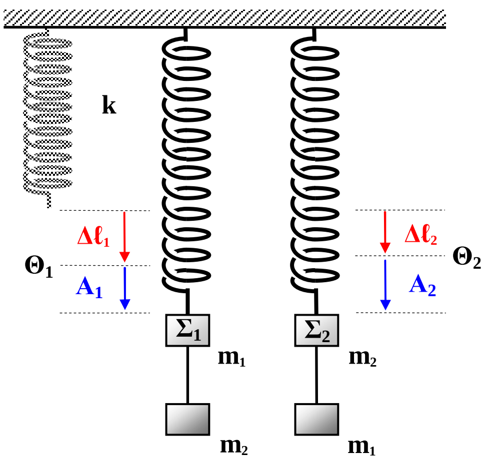
γ. → **Σ**ωστό

δ. → **Λ**άθος

ε. → **Λ**άθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η σωστή απάντηση είναι η **(β)**



ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ:

Τα δύο όμοια ελατήρια έχουν αρχικά υποστεί ίσες επιμηκύνσεις, αφού τα ακίνητα κρεμασμένα σώματα έχουν ίδιο συνολικό βάρος:

$$F_{ΕΛ}=k\cdot\Delta\ell=(m_1+m_2)\cdot g \quad\rightarrow\quad \Delta\ell=\frac{(m_1+m_2)g}{k} \quad\rightarrow$$

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{m_1 g}{k} + \frac{m_2 g}{k}}$$

Είναι εμφανές κατά ποιο ποσό συμβάλλει καθεμία από τις δύο μάζες στη συνολική παραμόρφωση. Αν τώρα κόψουμε το πρώτο νήμα, τότε το σώμα Σ_1 ξεκινώντας με μηδενική ταχύτητα, δηλαδή από την κάτω ακραία θέση, αρχίζει να εκτελεί ΓΑΤ, με σταθερή επαναφοράς **D=k**, γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας Θ_1 (όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\mathbf{\Delta\ell_1=m_1g/k}$). Το πλάτος αυτής της ΓΑΤ είναι $\mathbf{A_1=m_2g/k}$ και η ολική ενέργεια:

$$E_1=\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot A_1^2 \;\rightarrow\; E_1=\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot(m_2g/k)^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_1 = \frac{m_2^2 g^2}{2k}}$$

Με παρόμοιο συλλογισμό, προκύπτει για τη 2η περίπτωση: $\boxed{E_2 = \frac{m_1^2 g^2}{2k}}$

Έτσι για τον λόγο των δύο ενεργειών προκύπτει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2^2 g^2 / 2k}{m_1^2 g^2 / 2k} \quad \text{και τελικά:} \quad \boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}}$$

που οδηγεί στην απάντηση **(β)**.

B2. Η σωστή απάντηση είναι η **(α)**

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ:

Γνωρίζουμε ότι αν οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων από τις οποίες προκύπτουν διακροτήματα είναι **f** και **f΄** τότε η συχνότητα των διακροτημάτων είναι $\mathbf{f_\delta = |f - f'|}$. Στην περίπτωσή μας, η συχνότητα **f΄** μπορεί να είναι είτε η $\mathbf{f_1}$ είτε η $\mathbf{f_2}$, οπότε ισχύει:

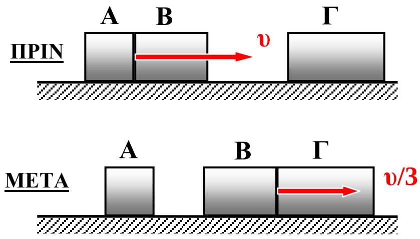
$f_\delta = |f - f_1| = |f - f_2| \;\rightarrow\; \boxed{f - f_1 = \pm(f - f_2)}$. Από την τελευταία αυτή σχέση προκύπτουν δύο περιπτώσεις:

i) $f_1 = f_2$ που προφανώς απορρίπτεται, και

ii) $f - f_1 = f_2 - f \;\rightarrow\; 2f = f_1 + f_2 \;\rightarrow\; \boxed{f = \frac{f_1 + f_2}{2}}$ που οδηγεί στην απάντηση **(α)**.

Είναι φανερό ότι η συχνότητα **f** βρίσκεται ανάμεσα στις δύο άνισες συχνότητες $\mathbf{f_1}$ και $\mathbf{f_2}$ και μάλιστα ισαπέχει από αυτές.

B3. Η σωστή απάντηση είναι η **(α)**



ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ:

Τα βάρη και οι κάθετες δυνάμεις στήριξης από το λείο δάπεδο, που ασκούνται στα τρία σώματα, αλληλοεξουδετερώνονται. Οι δυνάμεις αυτές όμως αποτελούν τις μόνες εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα των τριών σωμάτων. Έτσι, το σύστημα αυτό είναι μονωμένο και η συνολική ορμή διατηρείται σταθερή.

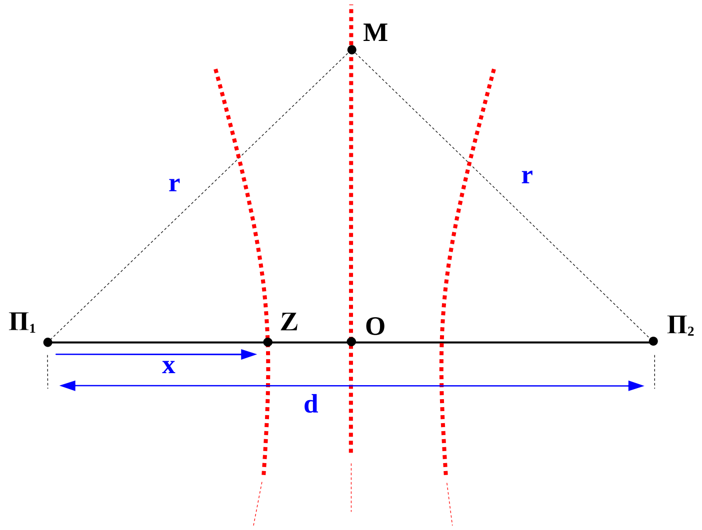
Εφαρμόζουμε στο σύστημα, αλγεβρικά μια και η κρούση είναι κεντρική, την αρχή διατήρησης της ορμής:

$p_{πριν} = p_{μετά} \rightarrow$ $\mathbf{m_1 \cdot υ + m_2 \cdot υ + 0 = 0 + m_2 \cdot υ/3 + 4m_1 \cdot υ/3} \rightarrow$ $\mathbf{3m_1 + 3m_2 = m_2 + 4m_1} \rightarrow$

$\mathbf{m_1 = 2m_2}$ και τελικά: $\boxed{\dfrac{m_1}{m_2} = 2}$ που οδηγεί στην απάντηση **(α)**.

ΘΕΜΑ Γ

ΔΙΝΟΝΤΑΙ
$t_o=0 \rightarrow y_{π1} = y_{π2} = A \cdot ημωt$
(Μ στη μεσοκάθετη του $Π_1Π_2$)
Μετά τη συμβολή (S.I):
$y_M = 0,2 \cdot ημ2π(5t-10)$
$υ = 2m/s$
(Ο μέσο του $Π_1Π_2$)
$(Π_1Π_2) = d = 1m$
ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
Γ1. $(ΜΠ_1) = ;$
Γ2. $ΔΦ_{O,M} = ;$
Γ3. $N = ;$ *(Ενίσχ. στο $Π_1Π_2$)*
Γ4. *Απεικόνιση της:* $y_M(t)$ *για:* $0 \le t \le 2,5s$



Γ1.

Ονομάζουμε τις αποστάσεις του Μ από τις πηγές $(ΜΠ_1) = r_1$ και $(ΜΠ_2) = r_2$ αντίστοιχα. Τότε, ισχύει προφανώς: $r_1 = r_2 = r$.

Η κίνηση που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων για τα σημεία της επιφάνειας του υγρού περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 2A \cdot συν2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right) \quad (I)$$

Θέτουμε $r_1 = r_2 = r$ και έχουμε για το σημείο Μ:

$$y_M = 2A \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{2r}{2λ}\right) \rightarrow \boxed{y_M = 2A \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{λ}\right)}$$

Συγκρίνοντας με αυτή που έχει δοθεί, παίρνουμε:

$2 \cdot A = 0,2m \rightarrow \boxed{A = 0,1m}$

$t/T = 5 \cdot t \rightarrow \boxed{T = 0,2s}$ οπότε: $f = 1/T \rightarrow \boxed{f = 5Hz}$

Τέλος: **r/λ = 10**, και αφού βρούμε το μήκος κύματος από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής: **υ = λ·f** → $\boxed{\lambda = 0,4m}$, υπολογίζουμε την απόσταση **r**: $\boxed{r = 10 \cdot \lambda = 4m}$.

Αυτή είναι και η ζητούμενη απόσταση του σημείου Μ από την πηγή $Π_1$:

$$\boxed{(ΜΠ_1) = r = 4m}$$

2η Λύση:

Το σημείο Μ ισαπέχει από τις δύο πηγές, συνεπώς τα δύο κύματα θα φτάσουν ταυτόχρονα σε αυτό. Τη στιγμή λοιπόν t_1 που θα αρχίσει το σημείο Μ να ταλαντώνεται θα έχει μηδενική φάση. Συνεπώς:

$$2\pi(5t_1-10)=0 \text{ ή } t_1=2s.$$

Αλλά τότε η απόσταση του Μ από την $Π_1$ είναι:

$$\boxed{(ΜΠ_1) = r = υ \cdot t_1 = 4m}$$

Γ2. Η ζητούμενη διαφορά φάσης της ταλάντωσης του σημείου Ο ως προς την ταλάντωση του σημείου Μ, είναι η διαφορά των φάσεων των δύο ταλαντώσεων και συγκεκριμένα:

$$\boxed{\Delta\Phi_{O,M} = \Phi_O - \Phi_M}$$

Και τα δύο σημεία ισαπέχουν από τις πηγές. Έτσι, τα δύο κύματα φτάνουν *ταυτόχρονα*, πρώτα στο Ο, που είναι πιο κοντά στις πηγές, και μετά στο Μ. Οι κινήσεις των σημείων προέρχονται μόνο από τη συμβολή των δύο κυμάτων.

Το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $\mathbf{t_1 = d/(2υ) = 0,25s}$ με εξίσωση:

$$y_O = 2A \cdot συν2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}ημ2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \xrightarrow{r_1=r_2=d/2} y_O = 2A \cdot ημ2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d}{2\lambda}\right)$$

και με αντικατάσταση: $\mathbf{y_O = 0,2 \cdot ημ2\pi(5t-1,25)}$

Το σημείο Μ αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $\mathbf{t_2 = r/υ = 2s}$ και τελικά οι ταλαντώσεις των δύο σημείων περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\boxed{y_O = 0,2 \cdot ημ2\pi(5t-1,25) = 0,2 \cdot ημ(10\pi t-2,5\pi) \quad \text{για} \quad t \geq 0,25s}$$

$$\boxed{y_M = 0,2 \cdot ημ2\pi(5t-10) = 0,2 \cdot ημ(10\pi t-20\pi) \quad \text{για} \quad t \geq 2s}$$

i) Για **t < 0,25s** τα δύο σημεία είναι ακίνητα και οι φάσεις τους είναι μηδενικές.

ii) Για **0,25s ≤ t < 2s** κινείται μόνο το σημείο Ο και η ζητούμενη διαφορά φάσης είναι: $\mathbf{\Delta\Phi_{O,M} = \Phi_O - \Phi_M = (10\pi t-2,5\pi) - 0}$ → $\boxed{\Delta\Phi_{O,M} = 10\pi t-2,5\pi}$, αυξάνεται δηλαδή γραμμικά από **0** έως **17,5π**.

iii) Για **t ≥ 2s** ταλαντώνονται πλέον και τα δύο σημεία, και η διαφορά φάσης τους παραμένει σταθερή και ίση με:

$\mathbf{\Delta\Phi_{O,M} = \Phi_O - \Phi_M = (10\pi t-2,5\pi) - (10\pi t-20\pi)}$ → $\boxed{\Delta\Phi_{O,M} = 17,5\pi}$, με το Ο να προηγείται σε φάση.

Γ3. Οι αποστάσεις από τις πηγές των σημείων της επιφάνειας που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, ικανοποιούν τη συνθήκη: $\mathbf{r_1 - r_2 = N \cdot \lambda}$ με **N=0, ±1, ±2, …** ώστε τα δύο συμβάλλοντα κύματα να βρίσκονται σε φάση (συμβολή και ενίσχυση).

Αν θεωρήσουμε ένα τέτοιο σημείο Ζ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$, και ονομάσουμε **x** την απόσταση $(\mathbf{Π_1Z})$, τότε $(\mathbf{Π_2Z}) = \mathbf{d - x}$. Η συνθήκη ενίσχυσης για το Ζ γίνεται:

$$\mathbf{x - (d - x) = N \cdot \lambda \;\rightarrow\; 2 \cdot x - d = N \cdot \lambda \;\rightarrow\; \boxed{x = (N \cdot \lambda + d)/2}}$$

Ισχύει όμως $\boxed{\mathbf{0 \le x \le d}}$ οπότε συνδυάζοντας προκύπτει:

$$\mathbf{0 \le (N \cdot \lambda + d)/2 \le d \;\rightarrow\; -d \le N \cdot \lambda \le +d \;\rightarrow\; \boxed{-d/\lambda \le N \le +d/\lambda}}$$

και με αντικατάσταση:

$\boxed{\mathbf{-2{,}5 \le N \le +2{,}5}}$ από όπου προκύπτει τελικά: $\boxed{\mathbf{N = 0, \pm 1, \pm 2}}$

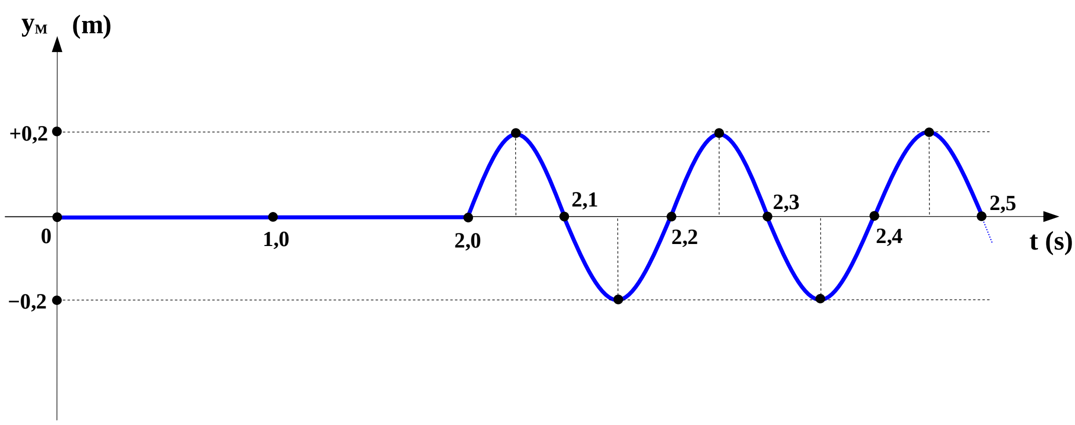
Ανάμεσα στις δύο πηγές υπάρχουν δηλαδή **5 σημεία συνολικά** που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος: Το σημείο Ο (Ν=0) και από δύο σημεία εκατέρωθεν του Ο σε συμμετρικές θέσεις.

Γ4. Όπως είδαμε πιο πάνω, το σημείο Μ αρχίζει να κινείται τη στιγμή $\mathbf{t_2 = 2s}$. Το χρονικό διάστημα $\mathbf{0 \le t \le 2{,}5s}$ που δόθηκε, μπορεί επομένως να διαιρεθεί σε δύο διαστήματα, $\mathbf{0 \le t < 2s}$, κατά τη διάρκεια του οποίου το Μ μένει ακίνητο, και $\mathbf{2s \le t \le 2{,}5s}$. Το τελευταίο αντιστοιχεί σε χρόνο $\mathbf{\Delta t = 0{,}5s}$ ή σε χρόνο **2,5** περιόδων:

$$\mathbf{\Delta t/T = 0{,}5s/0{,}2s = 2{,}5 \;\rightarrow\; \boxed{\Delta t = 2{,}5 \cdot T}}$$

Η εξίσωση της κίνησης του Μ είναι η: $\mathbf{y_M = 0{,}2 \cdot ημ2π(5t - 10)}$ (S.I)

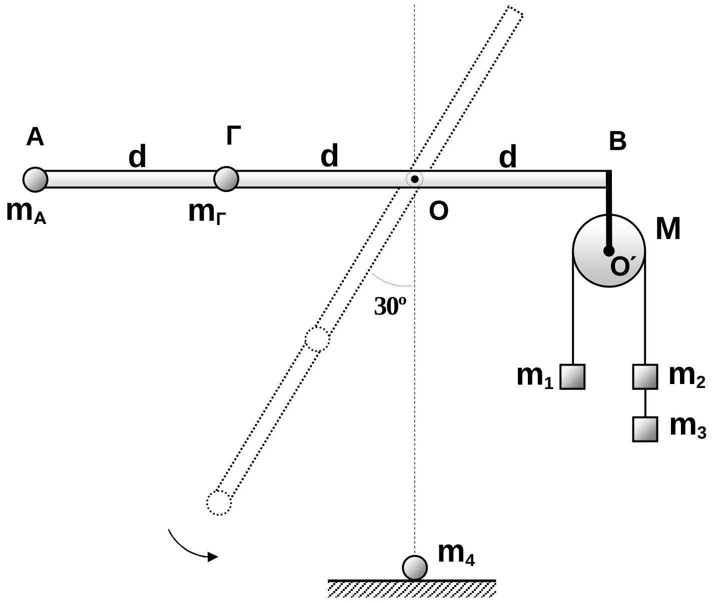
Στο χρόνο $\mathbf{\Delta t}$ το Μ ολοκλήρωσε δύο πλήρεις αιωρήσεις και μισή ακόμα. Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Παρατήρηση: Λόγω περιορισμένου χώρου, το τμήμα του άξονα των χρόνων από **0** έως **2s** είναι βαθμολογημένο σε μικρότερη κλίμακα από το υπόλοιπο.

ΘΕΜΑ Δ

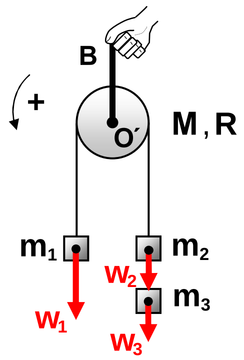
ΔΙΝΟΝΤΑΙ
Αβαρής ράβδος μήκους 3d **d = 1m** $\mathbf{m_A = 1kg, \quad m_\Gamma = 6kg}$ $\mathbf{M = 4kg, \quad m_1 = 2kg}$ $\mathbf{m_2 = m_3 = 1kg}$ *Τροχαλία:* $\mathbf{I = ½·M·R^2}$ $\mathbf{g = 10m/s^2, \quad ημ30^o = ½}$
ΖΗΤΟΥΝΤΑΙ
Δ1. *Να **<u>αποδείξετε ότι ισορροπεί</u>** οριζόντια.* **Δ2.** *(~~Ο΄Β~~. Όταν φ=30°)* $\mathbf{α_{γων} = ;}$ **Δ3.** *(Πλαστική κρούση)* $\mathbf{υ_A = ;}$ **Δ4.** $\mathbf{\cancel{m_3}.\ \cancel{m_A} \leftarrow m = ;}$ *(Ώστε ισορρ. ράβδου)*



Στη συνέχεια, στα επόμενα, τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα θα αναφέρονται στα μέτρα των αντίστοιχων μεγεθών.

Δ1.

Εξετάζουμε καταρχήν το είδος της ισορροπίας του συστήματος «τροχαλία – νήματα – τρία σώματα», αποσπώντας το από τη ράβδο και συγκρατώντας το με το χέρι.



Παρατηρούμε ότι, ***ως προς το σημείο Ο΄*** από το οποίο διέρχεται ο άξονας της τροχαλίας, η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών στο σύστημα αυτό είναι μηδενική:

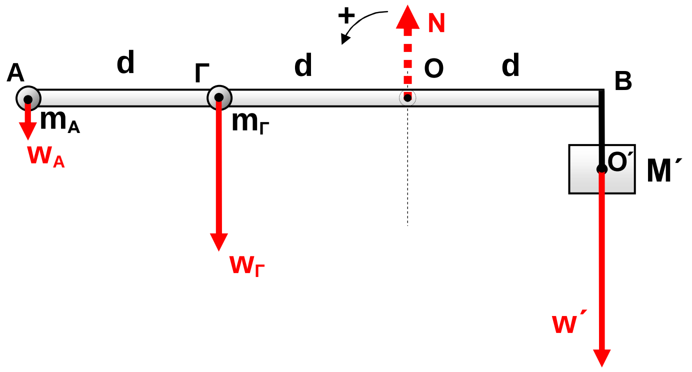
$$\mathbf{Στ_{εξ\,(Ο΄)} = +w_1R - (w_2+w_3)R = +m_1gR - (m_2+m_3)gR = 0}$$

Το σύστημα είναι επομένως στροφικά μονωμένο και η συνολική στροφορμή του ως προς Ο΄ παραμένει σταθερή. Αν δεχτούμε ότι ***τα νήματα παραμένουν τεντωμένα*** και ***δεν συμβαίνει ολίσθηση*** στην τροχαλία, τότε, σε περίπτωση κίνησης, οι στροφορμές όλων των σωμάτων θα είναι υποχρεωτικά ομόρροπες (αλγεβρικές τιμές ίδιου προσήμου).

<u>Αν επομένως κάποια στιγμή η τροχαλία δεν στρέφεται</u> ($\mathbf{L_{συστ} = 0}$), ***τότε δεν είναι δυνατόν να στραφεί***, όποια κατακόρυφη δύναμη $\mathbf{F_{O΄}}$ κι αν ασκηθεί στο σημείο Ο΄. Το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στερεό συνολικής μάζας $\boxed{\mathbf{M΄ = M+m_1+m_2+m_3 = 8kg}}$ που το κέντρο μάζας του (CM) βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη που διέρχεται από το Ο΄ και μπορεί να κάνει μόνο μεταφορική κίνηση που περιγράφεται από τον 2° νόμο: $\mathbf{F_{O΄} - M΄g = M΄α_{CM}}$

<u>*Παρατηρήσεις*</u>:

- Αυτονόητο είναι βέβαια ότι η προηγούμενη σχέση παύει να ισχύει για ακραίες τιμές της $\boldsymbol{\alpha}_{cm}$ όπου τα νήματα κινδυνεύουν να κοπούν ή να χαλαρώσουν.
- Η στροφική ισορροπία της τροχαλίας προφανώς δεν επηρεάζεται ούτε από πιθανή κλίση του τμήματος ΒΟ΄ προς τα αριστερά ή δεξιά, *αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι στερεό σώμα*, π.χ. κάποιο έλασμα, *και όχι νήμα*.

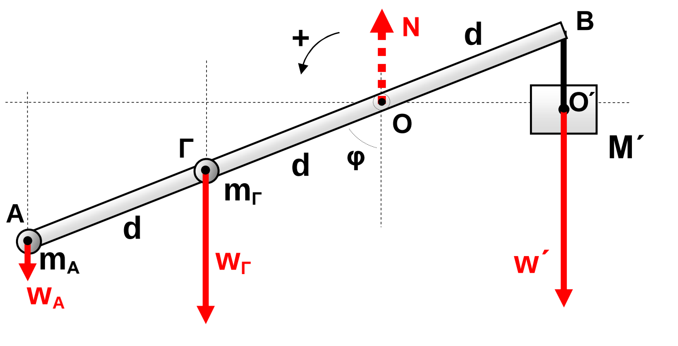


Αφού λοιπόν η ***στροφική ισορροπία της τροχαλίας είναι αδιάφορη***, το αρχικό μας σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί σ' αυτό που φαίνεται δίπλα (*με την ελπίδα βέβαια ότι το στήριγμα ΒΟ΄ είναι αβαρές*).

(Ι) Υποθέτουμε ότι βρίσκεται αρχικά στην οριζόντια θέση και εξετάζουμε τη συνολική εξωτερική ροπή ως προς το σημείο Ο από όπου διέρχεται ο άξονας περιστροφής:

$$\boldsymbol{\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\,(O)} = w_A \cdot 2d + w_\Gamma \cdot d - w' \cdot d = (2m_A + m_\Gamma - M') \cdot d \cdot g = 0}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στην οριζόντια αυτή θέση το σύστημά μας είναι στροφικά μονωμένο ($\mathbf{L_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}$ **= σταθ.**) και ***μπορεί να ισορροπεί στη θέση αυτή αν η γωνιακή του ταχύτητα είναι μηδενική***.



(ΙΙ) Υποθέτουμε στη συνέχεια (*ελπίζοντας βέβαια πως οι σημειακές μάζες* $\boldsymbol{m_A}$ *και* $\boldsymbol{m_\Gamma}$ *είναι στερεωμένες στη ράβδο και δεν θα γλιστρήσουν*) ότι η ράβδος σχηματίζει γωνία **φ ≠ 90°** με την κατακόρυφη. Εδώ έχουμε τώρα δύο πιθανά σενάρια:

(ΙΙ-α) *Αν το τμήμα ΒΟ΄ είναι νήμα*, τότε το σύστημα εξακολουθεί να είναι στροφικά μονωμένο, αφού:

$\boldsymbol{\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\,(O)}} =$

$= \boldsymbol{(w_A \cdot 2d + w_\Gamma \cdot d - w' \cdot d)\,\eta\mu\varphi} =$

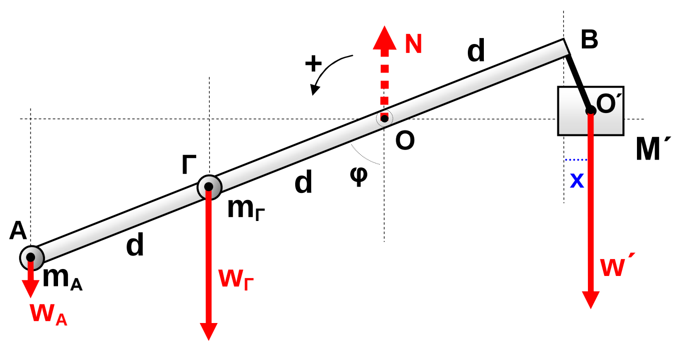
$= (2m_A + m_\Gamma - M')\cdot d\cdot g\,\eta\mu\varphi = 0$

Στην περίπτωση αυτή, ***η ισορροπία του συστήματός μας είναι στροφικά αδιάφορη, αν δηλαδή η ράβδος έχει μηδενική γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή που την αφήνουμε ελεύθερη, τότε ισορροπεί όχι μόνο στην οριζόντια θέση, αλλά και υπό διάφορες κλίσεις*** (αρκεί να μη πέφτει πάνω της η κρεμασμένη τροχαλία).

(ΙΙ-β) *Αν όμως το τμήμα ΒΟ΄ είναι κάποιο έλασμα στερεωμένο στη ράβδο,* τότε τα πράγματα είναι διαφορετικά (βλέπε σχήμα στην επόμενη σελίδα):

$\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\,(O)} = (w_A\cdot 2d\,\eta\mu\varphi + w_\Gamma\cdot d\,\eta\mu\varphi - w'\cdot(d\,\eta\mu\varphi + x) =$

$= (w_A\cdot 2d + w_\Gamma\cdot d - w'\cdot d)\,\eta\mu\varphi - w'\cdot x = (2m_A + m_\Gamma - M')\cdot d\cdot g\,\eta\mu\varphi - w'\cdot x = -w'\cdot x \neq 0$



Βλέπουμε δηλαδή ότι ***αν η ράβδος εκτραπεί κατά γωνία φ από την οριζόντια θέση της***, τότε ο φορέας του βάρους **w΄** απομακρύνεται κατά μια οριζόντια απόσταση **x** από το σημείο Β, με αποτέλεσμα να ***εμφανίζεται μια ροπή επαναφοράς*** $\Sigma\tau_{(O)} = -M'\cdot g\cdot x$ ***που τείνει να επαναφέρει τη ράβδο στην οριζόντια θέση*** !

<u>Στην περίπτωση αυτή λοιπόν η ράβδος παρουσιάζει ευσταθή ισορροπία στην οριζόντια θέση</u>.

Δ2.

Θα εφαρμόσουμε στο σύστημα ράβδου – μαζών τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση, ως προς τον άξονα περιστροφής Ο, τη στιγμή που η ράβδος σχηματίζει γωνία **φ=30°** με την κατακόρυφο:

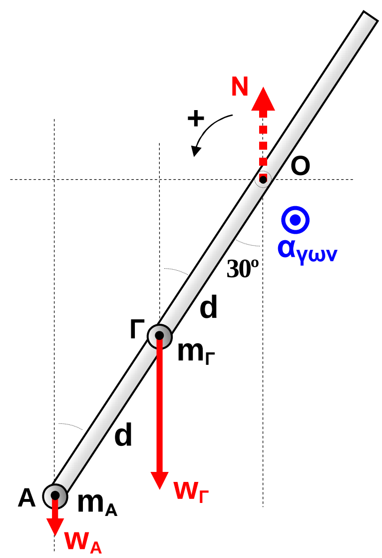
$\Sigma\tau_{(O)} = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$(w_A\cdot 2d + w_\Gamma\cdot d)\eta\mu\varphi = (m_A\cdot 4d^2 + m_\Gamma\cdot d^2)\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

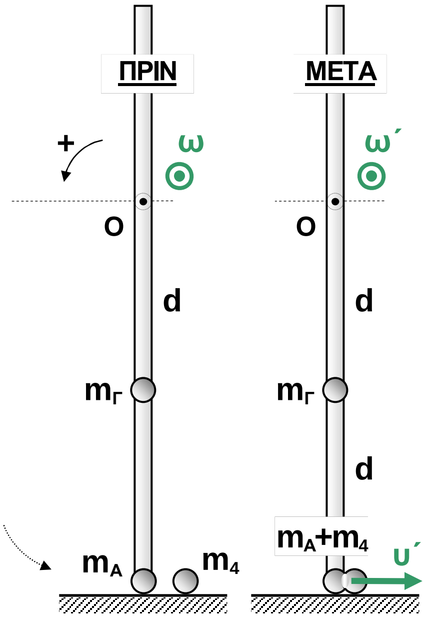
$(2m_A + m_\Gamma)\cdot g\cdot d\,\eta\mu\varphi = (4m_A + m_\Gamma)\cdot d^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$(2m_A + m_\Gamma)\cdot g\,\eta\mu\varphi = (4m_A + m_\Gamma)\cdot d\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{(2m_A + m_\Gamma)\cdot g\cdot \eta\mu\varphi}{(4m_A + m_\Gamma)\cdot d} \rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 4r/s^2}$$



Δ3. Στη συνέχεια, η ράβδος φτάνει στην κατακόρυφη θέση και ακολουθεί πλαστική κρούση με την ακίνητη μάζα $\mathbf{m_4}$ (βλέπε διπλανό σχήμα).



Υπολογίζουμε πρώτα τη γωνιακή ταχύτητα **ω** της ράβδου πριν την κρούση. Σε σχέση με την αρχική του θέση, η δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώθηκε, λόγω καθόδου των μαζών, κατά $\mathbf{|ΔU|=w_Α \cdot 2d+w_Γ \cdot d}$ και κατά το ίδιο ποσό αυξήθηκε η κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφής, αφού δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας σε άλλες μορφές. Έτσι:

$$\tfrac{1}{2} \cdot I \cdot ω^2 - 0 = w_Α \cdot 2d + w_Γ \cdot d \;\rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot (m_Α \cdot 4d^2 + m_Γ \cdot d^2) \cdot ω^2 = (2m_Α + m_Γ) \cdot g \cdot d \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot (4m_Α + m_Γ) \cdot d \cdot ω^2 = (2m_Α + m_Γ) \cdot g \;\rightarrow$$

$$ω = \sqrt{\frac{2 \cdot (2m_Α + m_Γ) \cdot g}{(4m_Α + m_Γ) \cdot d}} \;\rightarrow\; \boxed{ω = 4 r/s}$$

Κατά την κρούση, το σύστημα ράβδου – μαζών, συμπεριλαμβανομένης και της $\mathbf{m_4}$, είναι στροφικά μονωμένο ως προς Ο, διότι οι φορείς των εξωτερικών δυνάμεων διέρχονται από το σημείο αυτό, οπότε $\mathbf{Στ_{(O)} = 0}$.

Επομένως διατηρείται η στροφορμή κατά τον άξονα Ο και μπορούμε να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα **ω΄** αμέσως μετά την κρούση.

Ισχύει (αλγεβρικά): $\mathbf{L_{πριν} = L_{μετά}} \;\rightarrow\; \mathbf{I \cdot ω + 0 = I' \cdot ω'} \;\rightarrow$

$$(m_Α \cdot 4d^2 + m_Γ \cdot d^2) \cdot ω = [(m_Α+m_4) \cdot 4d^2 + m_Γ \cdot d^2] \cdot ω' \;\rightarrow$$

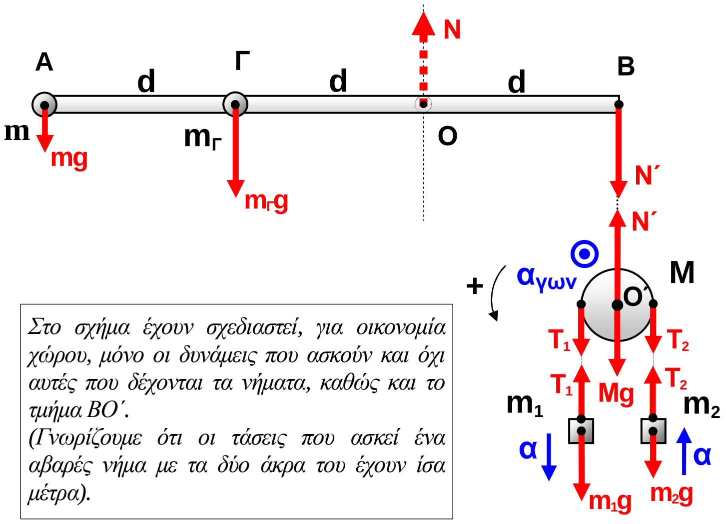
$$(4m_Α+m_Γ) \cdot ω = (4m_Α+4m_4+ m_Γ) \cdot ω' \;\rightarrow$$

$$ω' = \frac{ω}{3} \;\rightarrow\; \boxed{ω' = \frac{4}{3} r/s}$$

Και τελικά η ταχύτητα του σημείου Α αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$υ' = ω' \cdot 2d \;\rightarrow\; \boxed{υ' = \frac{8}{3} m/s = 2{,}67\ m/s}$$

Δ4. Στο εικονιζόμενο σχήμα έχουμε κόψει το νήμα που συγκρατούσε τη μάζα $\mathbf{m_3}$. Οι μάζες $\mathbf{m_1}$ και $\mathbf{m_2}$ προφανώς επιταχύνονται με την ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση **α**, λόγω του νήματος που τις συνδέει, έτσι ώστε η $1^η$ να κατεβαίνει και η $2^η$ να ανεβαίνει. Η τροχαλία επιταχύνεται κι αυτή στροφικά κατά τη θετική φορά με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\mathbf{α_{γων}}$ και επειδή το νήμα δεν γλιστράει, για οποιοδήποτε σημείο του που έρχεται σε επαφή με τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας, ισχύει:



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί, για οικονομία χώρου, μόνο οι δυνάμεις που ασκούν και όχι αυτές που δέχονται τα νήματα, καθώς και το τμήμα ΒΟ΄.
(Γνωρίζουμε ότι οι τάσεις που ασκεί ένα αβαρές νήμα με τα δύο άκρα του έχουν ίσα μέτρα).

$$\mathbf{α = \frac{dυ}{dt} = \frac{dω \cdot R}{dt} = α_{γων} \cdot R} \quad ή \quad \boxed{\mathbf{α_{γων} = \frac{α}{R}}} \quad \mathbf{(1)}$$

Η μάζα $\mathbf{m_A}$ έχει αντικατασταθεί με κατάλληλη μάζα **m** ώστε το σύστημα να ισορροπεί.

Εφαρμόζουμε τους νόμους του Νεύτωνα διαδοχικά για κάθε σώμα:

Η $\mathbf{m_1}$ επιταχύνεται μεταφορικά προς τα κάτω:

$$\mathbf{ΣF = m·α \;\rightarrow\; m_1·g - T_1 = m_1·α \;\rightarrow\; \boxed{T_1 = m_1·(g - α)}} \quad \mathbf{(2)}$$

Η $\mathbf{m_2}$ επιταχύνεται μεταφορικά προς τα πάνω:

$$\mathbf{ΣF = m·α \;\rightarrow\; T_2 - m_2·g = m_2·α \;\rightarrow\; \boxed{T_2 = m_2·(g + α)}} \quad \mathbf{(3)}$$

Η τροχαλία επιταχύνεται στροφικά:

$$\mathbf{Στ_{(O΄)} = I·α_{γων} \xrightarrow{(1)} (T_1 - T_2)·R = ½·MR^2·α/R \;\rightarrow}$$

$$\mathbf{\boxed{T_1 - T_2 = ½·M·α}} \quad \mathbf{(4)}$$

Η τροχαλία επίσης ισορροπεί μεταφορικά:

$$\mathbf{ΣF = 0 \;\rightarrow\; N΄ - T_1 - T_2 - M·g = 0 \;\rightarrow\; \boxed{N΄ = T_1 + T_2 + M·g}} \quad \mathbf{(5)}$$

Τέλος, το σύστημα ράβδου – μαζών ισορροπεί στροφικά (και μεταφορικά βέβαια, αλλά αυτό δεν μας χρειάζεται), οπότε:

$$\mathbf{Στ_{(O)} = 0 \;\rightarrow\; m·g·2d + m_Γ·g·d - N΄·d = 0 \;\rightarrow\; m·2g + m_Γ·g - N΄ = 0 \;\rightarrow}$$

$$\boxed{\mathbf{m = \frac{N' - m_Γ g}{2g}}} \quad \mathbf{(6)}$$

Από το σύστημα των πέντε τελευταίων εξισώσεων, από **(2)** έως **(6)**, υπολογίζουμε τελικά την άγνωστη μάζα **m** ως εξής:

$$\text{Από } \mathbf{(4)} \xrightarrow{(2),(3)} \mathbf{m_1·(g - α) - m_2·(g + α) = ½·M·α \;\rightarrow}$$

$$\boxed{\mathbf{α = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + M/2} = 2m/s^2}} \quad \mathbf{(7)}$$

$$\text{Από } \mathbf{(2)} \xrightarrow{(7)} \boxed{\mathbf{T_1 = 16N}} \quad \text{και από } \mathbf{(3)} \xrightarrow{(7)} \boxed{\mathbf{T_2 = 12N}}$$

Με αντικατάσταση στην **(5)** → $\boxed{\mathbf{N' = 68N}}$

Και τελικά από την **(6)**: **m΄ = 0,4kg**

Η ομάδα σύνταξης

ΥΦΧ

www. Ylikonet.gr