ΣΕΙΡΕΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Υπάρχουν διάφορες σειρές αριθμών.
Η ακολουθία 3, 7, 11, 15, 19, ... π.χ. είναι αριθμητική πρόοδος (α.π.) (κάθε αριθμός προκύπτει απ' τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 4) , ενώ η ακολουθία 2, 6, 18, 54, 162, ... είναι γεωμετρική πρόοδος (γ.π,) (κάθε αριθμός προκύπτει απ' τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό με τον αριθμό 3).
Η ακολουθία 5, 9, 15, 23, 33, ... δεν αποτελεί ούτε α.π. ούτε γ.π., αλλά παρατηρούμε ότι οι διαφορές των όρων της 4, 6, 8, 10, ... αποτελούν α.π. Το ερώτημα είναι, αν υπάρχει τύπος που να μας δίνει τον $\nu - \textit{οστό}$ όρο της όπως και το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

ΘΕΜΑ

Έστω ακολουθία $(b_\nu),\ \nu=1,2,3,\ldots$ τέτοια ώστε :
$b_{\nu+1}-b_\nu=a_\nu,$ *για κάθε* $\nu=1,2,3,\ldots,$ *όπου* $(a_\nu),\ \nu=1,2,3,\ldots,$ *αριθμητική πρόοδος με διαφορά* $\omega.$
Να βρεθεί ο ν-ιοστός όρος b_ν και το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

Απάντηση:
Έχουμε :

$$\begin{aligned} b_2-b_1&=a_1\\ b_3-b_2&=a_2\\ b_4-b_3&=a_3\\ &\cdots\\ &\cdots\\ b_\nu-b_{\nu-1}&=a_{\nu-1}\end{aligned}$$

και με πρόσθεση των σχέσεων αυτών κατά μέλη παίρνουμε :

$$b_\nu-b_1=S_{\nu-1}\Rightarrow b_\nu=\frac{\nu-1}{2}\left[2\mathrm{a}_1+(\nu-2)\omega\right]+b_1$$

$$\Rightarrow b_\nu=(\nu-1)a_1+\frac{1}{2}(\nu^2-3\mathrm{v}+2)\omega+b_1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b_\nu=\frac{1}{2}\omega\nu^2+\left(a_1-\frac{3}{2}\omega\right)\nu+(\omega+b_1-a_1)} \quad \mathbf{(1)}$$

Έστω $S'_\nu=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_\nu$ τότε από τη (1) έχουμε :

$$b_1=\frac{1}{2}\cdot\omega\cdot1^2+\left(a_1-\frac{3}{2}\omega\right)\cdot1+(\omega+b_1-a_1)$$

$$b_2=\frac{1}{2}\cdot\omega\cdot2^2+\left(a_1-\frac{3}{2}\omega\right)\cdot2+(\omega+b_1-\alpha_1)$$

$$b_3=\frac{1}{2}\cdot\omega\cdot3^2+\left(a_1-\frac{3}{2}\omega\right)\cdot3+(\omega+b_1-a_1)$$

::::::

……

$$b_\nu=\frac{1}{2}\cdot\omega\cdot\nu^2+\left(a_1-\frac{3}{2}\omega\right)\cdot\nu+(\omega+b_1-a_1)$$

και με πρόσθεση αυτών κατά μέλη παίρνουμε :

$$S'_v=\frac{1}{2}\omega\left(1^2+2^2+3^2+\cdots v^2\right)+\left(a_1-\frac{3}{2}\omega\right)\left(1+2+3+\cdots v\right)+\left(\omega+b_1-a_1\right)\cdot v\Rightarrow$$

$$\underline{\overline{\boldsymbol{S'_v=\frac{1}{2}\omega\frac{v(v+1)(2v+1)}{6}+\left(a_1-\frac{3}{2}\omega\right)\frac{v(v+1)}{2}+\left(\omega+b_1-a_1\right)v}}}$$

Π.χ.

1. Έστω η ακολουθία 7, 21, 43, 73, 111, ... (*)

Οι διαφορές των αριθμών αυτών είναι 14, 22, 30, 38, ..., δηλαδή διαδοχικοί όροι α.π. με πρώτο όρο $a_1=14$ και διαφορά $\omega=8$. Επειδή $b_1=7$ από την σχέση (2) έχουμε ότι το άθροισμα των 10 π.χ. πρώτων όρων της ακολουθίας (*) είναι :

$$S'_v=\frac{1}{2}8\frac{10(10+1)(2\cdot 10+1)}{6}+\left(14-\frac{3}{2}8\right)\frac{10(10+1)}{2}+\left(8+7-14\right)10=890$$

2. Έστω ότι κατασκευάζουμε ένα τετραγωνικό πίνακα ως εξής:

Αρχίζουμε από το κέντρο του και κινούμενοι δεξιόστροφα τοποθετούμε τους αριθμούς : 1, 2, 3, ...

Ο 5×5 πίνακας που κατασκευάζεται μ' αυτόν το τρόπο είναι :

21	22	23	24	25
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

Το άθροισμα των στοιχείων των διαγωνίων του είναι :

$(1+9+25)+(3+13)+(5+17)+(7+21)=101$

Για το άθροισμα των στοιχείων των διαγωνίων ενός πίνακα 25×25

601						625
		7	8	9	...	
		6	1	2		
		5	4	3		
577						543

που κατασκευάζεται με τον ίδιο τρόπο, από την παραπάνω σχέση για το άθροισμα έχουμε :

$$1+9+25+\cdots+625=2925$$
$$3+13+31+\cdots+543=2456$$
$$5+17+37+\cdots+577=2612$$
$$7+21+43+\cdots+601=2768$$

$\textit{Άρα το άθροισμα των στοιχείων των διαγωνίων είναι}:10761$