ΘΕΜΑ :

Ο λόγος των αθροισμάτων των ν πρώτων όρων δύο αριθμητικών προόδων ισούται με $\frac{2\nu+1}{3\nu-2}$ για κάθε $\nu=1,2,3,\ldots$. Να βρεθεί ο λόγος του ένατου όρου της μιας προς τον ένατο όρο της άλλης και τον λόγο του τέταρτου όρου της πρώτης προς τον δέκατο όρο της δεύτερης.

<u>Απάντηση</u>

Έστω $(a_\nu), \nu=1,2,3,\ldots$ η μία α.π. με διαφορά w και άθροισμα ν πρώτων όρων S_ν και $(b_\nu), \nu=1,2,3,\ldots$ η άλλη με διαφορά w' και άθροισμα ν πρώτων όρων αυτής S'_ν . Τότε από την υπόθεση έχουμε :

$$\frac{S_\nu}{S'_\nu}=\frac{\frac{\nu}{2}[2a_1+(\nu-1)w]}{\frac{\nu}{2}[2b_1+(\nu-1)w']}\Rightarrow\frac{2\nu+1}{3\nu-2}=\frac{2a_1+(\nu-1)w}{2b_1+(\nu-1)w'}$$

Μετά τις πράξεις και θεωρώντας ως μεταβλητή το ν παίρνουμε :

$$3w\nu^2+(6a_1-5w)\nu+2w-4a_1=2w'\nu^2+(4b_1-w')\nu+2b_1-w'$$

Η ισότητα αυτή για να ισχύει για κάθε $\nu=1,2,3,\ldots$ πρέπει

$$3w=2w' \quad (1) \quad \wedge \quad 6a_1-5w=4b_1-w' \quad (2) \quad \wedge \quad 2w-4a_1=2b_1-w' \quad (3)$$

Λύνουμε την (1) ως προς w' , αντικαθιστούμε στις (2) , (3) και θεωρώντας το w γνωστό παίρνουμε το σύστημα:

$12a_1-8b_1=7w \quad \wedge \quad 8a_1+4b_1=7w$, του οποίου η λύση είναι: $a_1=\frac{3}{4}w$, $b_1=\frac{1}{4}w$

Άρα $\frac{a_9}{b_9}=\frac{a_1+8w}{b_1+8w'}=\frac{\frac{3}{4}w+8w}{\frac{1}{4}w+8\frac{3}{2}w}=\frac{5}{7}$ και

$$\frac{a_4}{b_{10}}=\frac{a_1+3w}{b_1+9w'}=\frac{\frac{3}{4}w+3w}{\frac{1}{4}w+9\frac{3}{2}w}=\frac{3}{11}$$