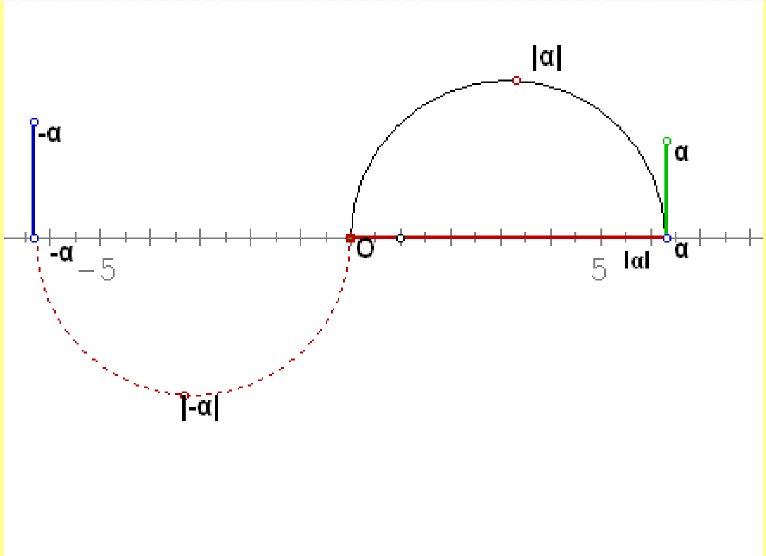
Απόλυτη Τιμή

Η Έννοια της απόλυτης τιμής : Είναι γνωστό ότι σε κάθε σημείο Α ενός άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός α και αντίστροφα. Την απόσταση του σημείου Α από την αρχή του άξονα δηλ. **το μήκος του ευθ. τμήματος ΟΑ, το ονομάζουμε απόλυτη τιμή του αριθμού α και την συμβολίζουμε με |α|**

Ορισμός : Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, ονομάζουμε απόλυτη τιμή του α, συμβολικά |α|, τον ίδιο τον αριθμό α αν α≥0 και τον αντίθετό του –α αν α<0.

δηλ. $|a| = \begin{cases} a \quad , \alpha \ge 0 \\ -a \quad , \alpha < 0 \end{cases}$



Κάντε «κλικ» για να δείτε κίνηση

Επειδή η απόλυτη τιμή εκφράζει μήκος, είναι πάντοτε μή αρνητικός αριθμός. Παρατηρήστε ακόμη ότι οι αριθμοί α και –α ισαπέχουν από το 0 και άρα έχουν ίσες απόλυτες τιμές δηλ.

|α|=|-α|≥0 και βέβαια **|α|=0←→α=0**

Εφαρμόζοντας τον ορισμό ...

|3|=3 , |-3|=-(-3)=3 ,
$|x^2+1|=x^2+1$, $|-2x^2-3|=2x^2+3$
$|x^2|=x^2$, $|-2-3x^4|=2+3x^4$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{αν } x \ge 1 \\ -x+1, \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, \text{αν } x \ge -\frac{1}{2} \\ -2x-1, \text{αν } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Η εξίσωση: |χ-1|+|χ+2|=0 είναι αδύνατη γιατί είναι άθροισμα μη αρνητικών αριθμών και άρα πρέπει χ=1 **και** χ=-2 , άτοπο

Η εξίσωση: $|\chi-2|+|\chi^2-4|=0$ έχει μία λύση , την χ=2 διότι σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών πρέπει χ=2 και (χ=2 ή χ=-2)

Οι ανισώσεις: |χ+1|+2 < 0 , |χ+1|+2 ≤ 0 , |χ+1|+|χ-2|<0 , |χ+1|+|χ-2|≤0 προφανώς είναι αδύνατες.

Η ανίσωση $|\chi-1|+|\chi^2-1|<0$ είναι αδύνατη , ενώ η ανίσωση $|\chi-1|+|\chi^2-1|\le 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $|\chi-1|+|\chi^2-1|=0$ και άρα έχει μια λύση , την χ=1

Οι ανισώσεις: |χ+1|+2 > 0 , |χ+1|+2 ≥ 0 , |χ+1|+|χ-2|>0 , |χ+1|+|χ-2|≥0 προφανώς αληθεύουν για κάθε τιμή του χ∈R.

Η ανίσωση $|\chi-1|+|\chi^2-1|>0$ αληθεύει για κάθε τιμή του χ∈R-{1} , ενώ η ανίσωση $|\chi-1|+|\chi^2-1|\ge 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του χ∈R.

Aris Nikolaidis

Να λύσετε την εξίσωση:

3|1-χ|-2|χ+2|+χ-1 = 0

Να λύσετε την ανίσωση:

3|1-χ|-2|χ+2|+χ-1 $\leq$ 0

Να βρείτε αναλυτικό τύπο (τύπο χωρίς απόλυτα) της συνάρτησης:

f(x)=2|x-2|-3|x+2|-|x|-x+1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x+1}{|x-1|+2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x+1}{|x-1|+|2x+1|}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{|1-2x|+3}$$

Εφαρμόζοντας τις Ιδιότητες ...

Ιδιότητες

$|\alpha|^2=\alpha^2$

$-|\alpha|\leq\alpha\leq|\alpha|$

$|\chi|=\alpha \Leftrightarrow \chi=\alpha$ ή $\chi=-\alpha$ ($\alpha>0$)

$|\chi|=|\alpha| \Leftrightarrow \chi=\alpha$ ή $\chi=-\alpha$

$|\chi|\leq\alpha \Leftrightarrow -\alpha\leq\chi\leq\alpha$ ($\alpha>0$)

$|\chi|\geq\alpha \Leftrightarrow \chi\geq\alpha$ ή $\chi\leq-\alpha$ ($\alpha>0$)

$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

και γενικά

$|\chi_1\cdot\chi_2\cdot\ldots\chi_\nu|=|\chi_1|\cdot|\chi_2|\ldots|\chi_\nu|$

$|\chi^\nu|=|\chi|^\nu$

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ ,\ \mu\varepsilon\ y\neq 0$$

$|x\pm y|\leq|x|+|y|$

$||x|-|y||\leq|x\pm y|$

Εφαρμογές

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- **$2|\chi+1|+3=0$**
- **$2|\chi+1|-3=0$**
- **$2|1-\chi|-3|\chi+2|=0$**
- **$3|2-\chi|+2|2-\chi|-4=|2-\chi|$**
- $2\frac{|3-x|}{3}-3\frac{|3-x|}{2}+1=|3-x|$
- **$\chi^2-3|\chi|+2=0$**
- **$(\chi-1)^2-|\chi-1|-2=0$**

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- **$2|2-3\chi|+3\geq 0$**
- **$2|2-3\chi|+3\leq 0$**
- **$2|2-3\chi|-3\geq 0$**
- **$2|2-3\chi|-3\leq 0$**
- **$3|2-\chi|+2|2-\chi|-4\leq|2-\chi|$**
- $2\frac{|3-x|}{3}-3\frac{|3-x|}{2}+1>|3-x|$
- **$|\chi^2-4|+|\chi^2-4\chi+4|\leq 0$**
- **$5\leq|3-2\chi|\leq 12$**

- Πότε ισχύει: |x+y|= |x|+|y|
- Πότε ισχύει: |x-y|= |x|+|y|
- Πότε ισχύει: ||x|-|y||= |x+y|
- Πότε ισχύει: ||x|-|y||= |x-y|
- Δείξτε ότι: |α+1|+|α-1|$\geq$2

[αποδ:

|α+1|+|α-1|$\geq$|α+1-α+1|=2]

- Δείξτε ότι αν ||χ|-|y||=|χ+y| τότε χ|y|+y|χ|=0

Aris Nikolaidis

Τέλος, αν Α , Β είναι οι εικόνες των αριθμών α , β , η |α-β| εκφράζει την <u>απόσταση</u> των εικόνων τους και συμβολίζεται με d(A,B) δηλ. (ΑΒ)=d(A,B)=|α-β|	• Να αποδείξετε ότι η εικόνα του αριθμού (α+β)/2 βρίσκεται στο μέσον των εικόνων των αριθμών α , β [Υποδ: Αρκεί να δείξουμε ότι: |α-(α+β)/2|=|β-(α+β)/2| ….]	• Μπορούμε εύκολα να βρούμε τη λύση της εξίσωσης |χ-1|=|χ-3|, αν σκεφθούμε ότι ο χ πρέπει να ισαπέχει από τους 1 , 3 δηλ. να βρίσκεται στο μέσον τους και άρα χ=(1+3)/2=2

<u>Προτεινόμενες Ασκήσεις</u> :

1. Αν α≤β≤γ να δείξετε ότι: |α-β|+|β-γ|+|γ-α|=0
2. Να βρείτε αναλυτικό τύπο (τύπο χωρίς απόλυτα) της παράστασης K=|χ-1|+|χ-2|
3. Να υπολογίσετε τις τιμές του ακεραίου χ , αν είναι γνωστό ότι ισχύουν οι σχέσεις: |2χ-1|= 1-2χ και |χ+1|=χ+1
4. Αν d(4χ,3y)=4χ-3y , να αποδείξετε ότι y ≤ 4χ/3
5. Αποδείξτε ότι:

$\|3\|a\|+4a\|=4\|a\|+3a$	$\|a^2+2a+1\|-\|a^2-2a+1\|=4a$	$\|a^2+4a+5\|+5=\|a^2-6a+10\|+10a$
$\frac{3a}{\|a\|}+\frac{7\beta}{\|\beta\|}\le 10$	(|μ-λ|+λ-μ)(|λ-μ|-λ+μ) ≥ 0	(α|β|-β|α|)(α|β|+β|α|)=0

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

• $\|χ^2+2χ^3-12\|=-1$	• $\|χ\|=-χ^2+2χ-1$	• |7χ-1|=2	• |2χ+1|=|χ+1|
• $\|2χ-1\|=(2χ-1)^2$	• $\|χ-5\|+\|χ^2-5χ\|=0$	• $\|χ-5\|+\|χ^2-5χ\|=0$	• $(χ-2)^2+1=2\|χ-2\|$

• $\|3\|x-1\|+1\|=3$	• $\|x-1\|+2\|1-x\|=3$	• $\frac{\|x-2\|}{2}+\|x-2\|=\frac{\|2-x\|+5}{4}$	• $\left\|\frac{x-2}{3-2x}\right\|=\frac{1}{3}$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

• $\|8-3x\|<2$	• $\|3-4x\| \geq 1$	• $\|2x-5\| \leq -x^2+2x-1$	• $\|x^2-2x\| \leq -4x^2+4x-1$
• $\|x-4\| < x-1$	• $2 \leq \|x-1\| \leq 4$	• $\frac{\|2x+1\|}{3}-\frac{5\|2x+1\|}{6}<\frac{4\|2x+1\|+1}{12}+\frac{\|2x+1\|}{4}$	

8. Να αποδείξετε ότι αν $|7x+2y-4| = 7|x|+2|y-2|$, τότε $x(y-2) \geq 0$

9. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(2a+1)^2}{|2a+1|}+\frac{(2a-1)^2}{|2a-1|} \geq 2$

10. Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 5$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $K=2x-3y-21$.