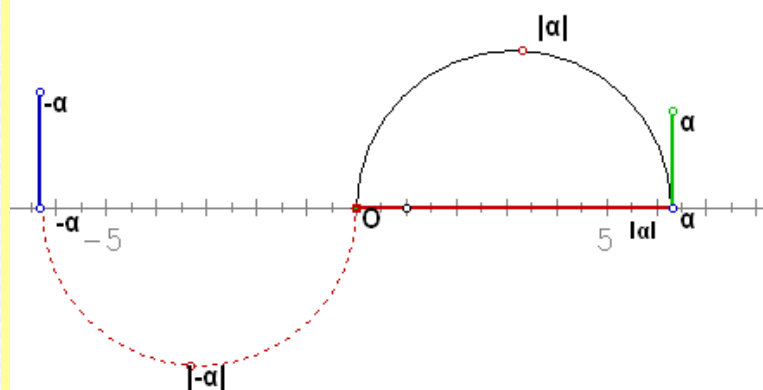


# Απόλυτη Τιμή

**Η Έννοια της απόλυτης τιμής :** Είναι γνωστό ότι σε κάθε σημείο A ενός άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός  $a$  και αντίστροφα. Την απόσταση του σημείου A από την αρχή του άξονα δηλ. **το μήκος του ευθ. τμήματος OA, το ονομάζουμε απόλυτη τιμή του αριθμού  $a$  και την συμβολίζουμε με  $|a|$**

**Ορισμός :** Αν  $a$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του  $a$ , συμβολικά  $|a|$ , τον ίδιο τον αριθμό  $a$  αν  $a \geq 0$  και τον αντίθετό του  $-a$  αν  $a < 0$ .

$$\text{δηλ. } |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$



[Κάντε «κλικ» για να δείτε κίνηση](#)

Επειδή η απόλυτη τιμή εκφράζει μήκος, είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός. Παρατηρήστε ακόμη ότι οι αριθμοί  $a$  και  $-a$  ισαπέχουν από το 0 και άρα έχουν ίσες απόλυτες τιμές δηλ.

$$|a| = |-a| \geq 0 \text{ και βέβαια } |a| = 0 \iff a = 0$$

## Εφαρμόζοντας τον ορισμό ...

$$\begin{aligned} |3| &= 3, & |-3| &= -(-3) = 3, \\ |x^2+1| &= x^2+1, & |-2x^2-3| &= 2x^2+3 \\ |x^2| &= x^2, & |-2-3x^4| &= 2+3x^4 \end{aligned}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & \text{αν } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Η εξίσωση:  $|x-1|+|x+2|=0$  είναι αδύνατη γιατί είναι άθροισμα μη αρνητικών αριθμών και άρα πρέπει  $x=1$  **και**  $x=-2$ , άτοπο

Η εξίσωση:  $|x-2|+|x^2-4|=0$  έχει μία λύση, την  $x=2$  διότι σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών πρέπει  $x=2$  και ( $x=2$  ή  $x=-2$ )

Οι ανισώσεις:  $|x+1|+2 < 0$ ,  $|x+1|+2 \leq 0$ ,  $|x+1|+|x-2| < 0$ ,  $|x+1|+|x-2| \leq 0$  προφανώς είναι αδύνατες.

Η ανίσωση  $|x-1|+|x^2-1| < 0$  είναι αδύνατη, ενώ η ανίσωση  $|x-1|+|x^2-1| \leq 0$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:  $|x-1|+|x^2-1|=0$  και άρα έχει μια λύση, την  $x=1$

Οι ανισώσεις:  $|x+1|+2 > 0$ ,  $|x+1|+2 \geq 0$ ,  $|x+1|+|x-2| > 0$ ,  $|x+1|+|x-2| \geq 0$  προφανώς αληθεύουν για κάθε τιμή του  $x \in \mathbb{R}$ .

Η ανίσωση  $|x-1|+|x^2-1| > 0$  αληθεύει για κάθε τιμή του  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ , ενώ η ανίσωση  $|x-1|+|x^2-1| \geq 0$  αληθεύει για κάθε τιμή του  $x \in \mathbb{R}$ .

Να λύσετε την εξίσωση:

$$3|1-x|-2|x+2|+x-1=0$$

Να λύσετε την ανίσωση:

$$3|1-x|-2|x+2|+x-1 \leq 0$$

Να βρείτε αναλυτικό τύπο ( τύπο χωρίς απόλυτα ) της συνάρτησης:

$$f(x)=2|x-2|-3|x+2|-|x|-x+1$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x+1}{|x-1|+2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x+1}{|x-1|+|2x+1|}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{|1-2x|+3}$$

### Εφαρμόζοντας τις Ιδιότητες ...

#### Ιδιότητες

$$|a|^2=a^2$$

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$|x|=a \iff x=a \text{ ή } x=-a \quad (a>0)$$

$$|x|=|a| \iff x=a \text{ ή } x=-a$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \quad (a>0)$$

$$|x| \geq a \iff x \geq a \text{ ή } x \leq -a \quad (a>0)$$

$$|x \cdot y|=|x| \cdot |y|$$

και γενικά

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n|=|x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_n|$$

$$|x^v|=|x|^v$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ με } y \neq 0$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$||x|-|y|| \leq |x \pm y|$$

#### Εφαρμογές

**Να λύσετε τις εξισώσεις:**

$$\bullet 2|x+1|+3=0$$

$$\bullet 2|x+1|-3=0$$

$$\bullet 2|1-x|-3|x+2|=0$$

$$\bullet 3|2-x|+2|2-x|-4=|2-x|$$

$$\bullet 2\frac{|3-x|}{3}-3\frac{|3-x|}{2}+1=|3-x|$$

$$\bullet x^2-3|x|+2=0$$

$$\bullet (x-1)^2-|x-1|-2=0$$

**Να λύσετε τις ανισώσεις:**

$$\bullet 2|2-3x|+3 \geq 0$$

$$\bullet 2|2-3x|+3 \leq 0$$

$$\bullet 2|2-3x|-3 \geq 0$$

$$\bullet 2|2-3x|-3 \leq 0$$

$$\bullet 3|2-x|+2|2-x|-4 \leq |2-x|$$

$$\bullet 2\frac{|3-x|}{3}-3\frac{|3-x|}{2}+1 > |3-x|$$

$$\bullet |x^2-4|+|x^2-4x+4| \leq 0$$

$$\bullet 5 \leq |3-2x| \leq 12$$

• Πότε ισχύει:  $|x+y|=|x|+|y|$

• Πότε ισχύει:  $|x-y|=|x|+|y|$

• Πότε ισχύει:  $||x|-|y||=|x+y|$

• Πότε ισχύει:  $||x|-|y||=|x-y|$

• Δείξτε ότι:  $|a+1|+|a-1| \geq 2$

[ αποδ:

$$|a+1|+|a-1| \geq |a+1-a+1|=2 ]$$

• Δείξτε ότι αν  $||x|-|y||=|x+y|$

τότε  $x|y|+y|x|=0$

**Τέλος, αν  $A, B$  είναι οι εικόνες των αριθμών  $a, \beta, \eta$   $|a-\beta|$  εκφράζει την απόσταση των εικόνων τους και συμβολίζεται με  $d(A,B)$  δηλ.  $(AB)=d(A,B)=|a-\beta|$**

- Να αποδείξετε ότι η εικόνα του αριθμού  $(a+\beta)/2$  βρίσκεται στο μέσον των εικόνων των αριθμών  $a, \beta$   
[ Υποδ: Αρκεί να δείξουμε ότι:  $|a-(a+\beta)/2|=|\beta-(a+\beta)/2| \dots ]$

- Μπορούμε εύκολα να βρούμε τη λύση της εξίσωσης  $|x-1|=|x-3|$ , αν σκεφθούμε ότι ο  $x$  πρέπει να ισαπέχει από τους  $1, 3$  δηλ. να βρίσκεται στο μέσον τους και άρα  $x=(1+3)/2=2$

### Προτεινόμενες Ασκήσεις :

1. Αν  $a \leq \beta \leq \gamma$  να δείξετε ότι:  $|a-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-a|=0$
2. Να βρείτε αναλυτικό τύπο (τύπο χωρίς απόλυτα) της παράστασης  $K=|x-1|+|x-2|$
3. Να υπολογίσετε τις τιμές του ακεραίου  $x$ , αν είναι γνωστό ότι ισχύουν οι σχέσεις:  $|2x-1|=1-2x$  και  $|x+1|=x+1$
4. Αν  $d(4x,3y)=4x-3y$ , να αποδείξετε ότι  $y \leq 4x/3$
5. Αποδείξτε ότι:

$ 3 a +4a =4 a +3a$	$ a^2+2a+1 - a^2-2a+1 =4a$	$ a^2+4a+5 +5= a^2-6a+10 +10a$
$\frac{3a}{ a } + \frac{7\beta}{ \beta } \leq 10$	$( \mu-\lambda +\lambda-\mu)( \lambda-\mu -\lambda+\mu) \geq 0$	$(a \beta -\beta a )(a \beta +\beta a )=0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

• $ x^2+2x^3-12 =-1$	• $ x =-x^2+2x-1$	• $ 7x-1 =2$	• $ 2x+1 = x+1 $
• $ 2x-1 =(2x-1)^2$	• $ x-5 + x^2-5x =0$	• $ x-5 + x^2-5x =0$	• $(x-2)^2+1=2 x-2 $

$$\bullet |3|x-1|+1|=3$$

$$\bullet |x-1|+2|1-x|=3$$

$$\bullet \frac{|x-2|}{2} + |x-2| = \frac{|2-x|+5}{4}$$

$$\bullet \left| \frac{x-2}{3-2x} \right| = \frac{1}{3}$$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\bullet |8-3x| < 2$$

$$\bullet |3-4x| \geq 1$$

$$\bullet |2x-5| \leq -x^2+2x-1$$

$$\bullet |x^2-2x| \leq -4x^2+4x-1$$

$$\bullet |x-4| < x-1$$

$$\bullet 2 \leq |x-1| \leq 4$$

$$\bullet \frac{|2x+1|}{3} - \frac{5|2x+1|}{6} < \frac{4|2x+1|+1}{12} + \frac{|2x+1|}{4}$$

8. Να αποδείξετε ότι αν  $|7x+2y-4| = 7|x|+2|y-2|$  , τότε  $x(y-2) \geq 0$

9. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{(2a+1)^2}{|2a+1|} + \frac{(2a-1)^2}{|2a-1|} \geq 2$

10. Αν  $|x| \leq 3$  και  $|y| \leq 5$  , να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης:  $K=2x-3y-21$  .