Η Διάταξη στο IR

Ορισμοί :	Αν α , β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε ορίζουμε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta > 0$ και $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta \geq 0$ $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta < 0$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta \leq 0$

Ιδιότητες	Παρατηρήσεις - Σχόλια
$\alpha>0$ και $\beta>0 \Rightarrow \alpha+\beta>0$	Αν α , β ομόσημοι τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow 1/\alpha > 1/\beta$
$\alpha<0$ και $\beta<0 \Rightarrow \alpha+\beta<0$	Για κάθε α , $\beta \in IR$ ισχύει: $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$
Αν α , β ομόσημοι $\Rightarrow \alpha \cdot \beta>0$ και $\alpha/\beta >0$	• Αν $\alpha >0 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$ • Αν $\alpha >0 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$
Αν α , β ετερόσημοι $\Rightarrow \alpha \cdot \beta<0$ και $\alpha/\beta <0$	
Αν $\alpha \cdot \beta>0$ ή $\alpha/\beta >0 \Rightarrow$ α , β ομόσημοι	
Αν $\alpha \cdot \beta<0$ ή $\alpha/\beta <0 \Rightarrow$ α , β ετερόσημοι	
Για κάθε $\alpha \in IR \Rightarrow \alpha^2 \geq 0$ και γενικά $\alpha^{2\nu} \geq 0$	Μπορούμε εύκολα να ανακαλύπτουμε μόνιμα θετικές ή μόνιμα αρνητικές παραστάσεις. Έτσι: $X^2+3>0$, $2\chi^4+1 > 0$, $-\chi^2-5 < 0$, $-3\chi^2-1 < 0$ κ.λ.π
Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)	Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma \Rightarrow \alpha \geq \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)
Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma$	
Αν $\gamma > 0$ τότε: $\alpha >\beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$	Όταν σε μια ανίσωση κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πρέπει να ελέγχουμε το Ε.Κ.Π διότι αν είναι θετικός δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης , ενώ αν είναι αρνητικός αλλάζει η φορά της ανίσωσης
Αν $\gamma < 0$ τότε: $\alpha >\beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$	
Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta$	Δεν μπορούμε να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ομοιόστροφες ανισώσεις κατά μέλη.
Αν α , β ,γ , δ > 0 ισχύει: $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$	Δεν μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε ομοιόστροφες ανισώσεις κατά μέλη όταν όλοι οι όροι δεν είναι ομόσημοι.
Αν α , β ,γ , δ < 0 ισχύει: $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$	
Για θετικούς αριθμούς και $\nu \in IN^*$ ισχύει: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$	Γενικότερα για ομόσημους αριθμούς ισχύει: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ Για ετερόσημους αριθμούς: $\alpha^\nu = \beta^\nu \Rightarrow \alpha= - \beta$

Μεθοδολογία για τις ασκήσεις

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής Α>Β ή Α<Β ή Α≥Β ή Α≤Β εργαζόμαστε συνήθως με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1ος τρόπος :

Σχηματίζουμε τη διαφορά Α-Β και προσπαθούμε να βρούμε το πρόσημό της (παίρνουμε βέβαια πάντα υπόψη μας τις υποθέσεις της άσκησης).

Αν βρούμε Α-Β≥0 τότε Α≥Β

Αν βρούμε Α-Β≤0 τότε Α≤Β κ.λ.π

2ος τρόπος :

Ξεκινάμε από την ανισότητα που μας δίνεται και με ισοδυναμίες προσπαθούμε να φτάσουμε σε μία σχέση που ισχύει.

3ος τρόπος :

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις της άσκησης ή και άλλες γνωστές σχέσεις προσπαθούμε να «κατασκευάσουμε» την ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

Ασκήσεις

1. Αν α > β να αποδείξετε ότι: $a+\frac{\beta}{2}>\beta+\frac{a}{2}$

Λύση :

1ος τρόπος : $\left(a+\frac{\beta}{2}\right)-\left(\beta+\frac{a}{2}\right)=a+\frac{\beta}{2}-\beta-\frac{\alpha}{2}=\frac{2\alpha+\beta-2\beta-\alpha}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}>0$,

γιατί $\alpha-\beta>0$ από την υπόθεση $\alpha>\beta$

2ος τρόπος :

$a+\frac{\beta}{2}>\beta+\frac{a}{2}\Leftrightarrow\alpha-\frac{\alpha}{2}>\beta-\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}>\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow\alpha>\beta$, που ισχύει από την υπόθεση

2. Αν α > β και k ακέραιος με k > 1 , να αποδείξετε ότι: $a+\frac{\beta}{k}>\beta+\frac{a}{k}$

Λύση :

1ος τρόπος : $\left(a+\frac{\beta}{k}\right)-\left(\beta+\frac{a}{k}\right)=a+\frac{\beta}{k}-\beta-\frac{\alpha}{k}=\frac{k\alpha+\beta-k\beta-\alpha}{k}=\frac{(k-1)(\alpha-\beta)}{k}>0$,

γιατί $\alpha-\beta>0$ από την υπόθεση $\alpha>\beta$ και $k>1$

2ος τρόπος :

$$a+\frac{\beta}{k}>\beta+\frac{a}{k}\Leftrightarrow \alpha-\frac{\alpha}{k}>\beta-\frac{\beta}{k}\Leftrightarrow \frac{(k-1)\alpha}{2}>\frac{(k-1)\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$\overset{\frac{k-1}{2}>0}{\Leftrightarrow}$ $\alpha>\beta$, που ισχύει από την υπόθεση

3. Αν α+β>0 , να αποδείξετε ότι: $\dfrac{a^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

<u>Λύση</u> :

<u>1ος τρόπος</u> :

$$\left(\frac{a^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\right)-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{2a^2+2\beta^2-(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha+\beta)}=\frac{2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}{2(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}=\frac{(\alpha-\beta)^2}{2(\alpha+\beta)}\geq 0$$, λόγω της υπόθεσης και $(\alpha-\beta)^2\geq 0$

<u>2ος τρόπος</u> :

$$\frac{a^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$, που ισχύει (με την απαλοιφή παρονομαστών δεν αλλάζει η φορά)

<u>3ος τρόπος</u> :

Ξέρουμε ότι:

$$a^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+a^2+\beta^2\geq\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2\overset{\alpha+\beta>0}{\Rightarrow}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}$$

4. Αν χ>3 και y>4 , να αποδείξετε ότι: $\chi^3+y^2+1>44$

5. Αν α , β είναι ομόσημοι να δείξετε ότι : $\dfrac{a}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\geq 2$

6. Αν α , β είναι ετερόσημοι , να δείξετε ότι : $\dfrac{a}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\leq -2$

aris nikolaidis

7. Αν 0 < α < 1 , να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}>2$

Λύση :

1ος τρόπος :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}-2=\frac{1+a-2a^2}{a^2}=\frac{1+a-a^2-a^2}{a^2}=\frac{(1-a^2)+a(1-a)}{a^2}=$$

$$=\frac{(1-a)(1+a)+a(1-a)}{a^2}=\frac{(1-a)(1+2a)}{a^2}>0 \;,\; \text{διότι}: 1-\alpha>0\,, 1+2\alpha>0\,, \alpha^2>0$$

2ος τρόπος :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}>2 \Leftrightarrow 1+\alpha>2\alpha^2 \Leftrightarrow 1+\alpha-\alpha^2-\alpha^2>0 \Leftrightarrow (1-\alpha^2)+\alpha(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)(1+\alpha)+\alpha(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow (1-\alpha)(1+2\alpha)>0 \;,\; \text{που ισχύει } (0<\alpha<1)$$

8. Να αποδείξετε ότι : $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2 \geq \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}$

9. Αν α > β > 0 να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}>\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

10. Αν α , β , γ είναι θετικοί , να αποδείξετε ότι : $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\alpha+\gamma)+\gamma^2(\alpha+\beta) \geq 6\alpha\beta\gamma$

11. Αν α , β > 0 να αποδείξετε ότι : $\frac{a^3+\beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$

12. Αν α , β είναι ομόσημοι και α<1 , β<1 , να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha\beta}$

13. Αν χ , y , ω είναι θετικοί αριθμοί να συγκρίνετε τους αριθμούς :
α=(1+χ)(1+y)(1+ω) και β=1+χ+y+ω

14. Αν α < β και 0 < χ < 1 , να αποδείξετε ότι : α < α+χ(β-α) < β

15. Αν –2 ≤ χ ≤ 5 και –1≤ y≤ 2 , να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης K=3χ-3y-5