

# Ρίζες

## Η Τετραγωνική ρίζα

( από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε ... )

**Ορισμός :** Τετραγωνική ρίζα ενός μη

αρνητικού αριθμού α ( συμβολικά  $\sqrt{a}$  ),

ονομάζουμε ένα μη αρνητικό αριθμό x με την ιδιότητα :  $x^2 = a$  δηλ.

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$$

## Ιδιότητες

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ για κάθε } a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{a \cdot \beta}, \text{ με } a, \beta \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}}, \text{ με } a \geq 0, \beta > 0$$

$$\sqrt{a^2 \cdot \beta} = a \cdot \sqrt{\beta}, \text{ με } a, \beta \geq 0$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{\beta} \neq \sqrt{a \pm \beta}, a, \beta \geq 0$$

## Παραδείγματα - Σχόλια

1.  $\sqrt{25} = 5$  και βέβαια  $\sqrt{25} \neq -5$
2. Η έκφραση  $\sqrt{-4}$  δεν έχει έννοια.
3. Η παράσταση  $K = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$  έχει έννοια όταν  $-2 \leq x \leq 1$
4. Η εξίσωση:  $\sqrt{x+1} + 3 = 0$  είναι αδύνατη

$$1. (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 6$$

$$2. \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

$$3. \sqrt{(x^2+1)^2} = x^2+1$$

$$4. \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$5. \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$6. \sqrt{864} = \sqrt{2^5 \cdot 3^3} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 3} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{6}$$

$$7. \sqrt{9x^3y^4\omega} = \sqrt{3^2 \cdot x^2 \cdot x \cdot (y^2)^2 \cdot \omega} = 3|x|y^2\sqrt{x\omega}$$

$$8. \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{1+3-2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}-1$$

Μετατροπή κλασμάτων της μορφής  $\frac{A}{\kappa\sqrt{a} \pm \lambda\sqrt{\beta}}$  σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

Θυμηθείτε : Πολ/ζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή ...

$$1. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})^2 + (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})^2}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})} =$$
$$= \frac{2(\sqrt{x^2+1})^2 + 2(\sqrt{x^2-1})^2}{(\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{4x^2}{2} = 2x^2$$

## Η Νιοστή ρίζα

**Ορισμός :** Νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού

αριθμού α ( συμβολικά  $\sqrt[n]{\alpha}$  ), ονομάζουμε ένα

μη αρνητικό αριθμό x με την ιδιότητα :  $x^n = \alpha$

δηλ.  $\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha$

### Ιδιότητες

$(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$  , για κάθε  $\alpha \geq 0$

$\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$  , για κάθε  $\alpha \geq 0$

$\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$  , με  $\alpha, \beta \geq 0$

$\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$  , με  $\alpha \geq 0, \beta > 0$

$\sqrt[n]{\alpha^n} \cdot \beta = \alpha \cdot \sqrt[n]{\beta}$  , με  $\alpha, \beta \geq 0$

$\sqrt[n]{\alpha} \pm \sqrt[n]{\beta} \neq \sqrt[n]{\alpha \pm \beta}$  ,  $\alpha, \beta \geq 0$

$\sqrt[n]{\alpha^k} = (\sqrt[n]{\alpha})^k$  , με  $\alpha, \beta \geq 0$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[n \cdot m]{\alpha}$  , με  $\alpha \geq 0$

$\sqrt[n \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[n]{\alpha^\mu}$  , με  $\alpha \geq 0$

$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}$  , με  $\alpha, \beta \geq 0$

## Παραδείγματα - Σχόλια

$$\sqrt{8} \quad 2 \quad \sqrt{-8} = -2$$

2. Η έκφραση  $2\sqrt{-4}$  δεν έχει έννοια.

$$3. \sqrt[4]{(x-1)^4} = |x-1|$$

$$4. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2ax}$$

$$5. \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{32}{8}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{8} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{4^3} \cdot \sqrt[12]{8^6} =$$

$$6. = \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^{18}} = \sqrt[12]{2^{28}} = \sqrt[3]{2^7} = \\ = \sqrt[3]{(2^2)^3} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$$

$$7. \sqrt{2a} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot a^2}} = \\ = \sqrt{2a} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 a^2}} = \sqrt{2a} \cdot \sqrt[12]{2^6 \cdot a^2} = \\ = \sqrt[12]{(2 \cdot a)^{12} \cdot 2^6 \cdot a^2} = \sqrt[24]{2^{18} \cdot a^{14}} = \sqrt[12]{2^9 \cdot a^7}$$

8. Τροπή κλασμάτων της μορφής  $\frac{A}{\alpha \cdot \sqrt[n]{\beta^\mu}}$  σε

ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3 \cdot \sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{6}$$

## Η Εξίσωση $x^n = \alpha$

$n = \text{άρτιος και } \alpha < 0$	$n = \text{άρτιος και } \alpha > 0$	$n = \text{περιττός και } \alpha > 0$	$n = \text{περιττός και } \alpha > 0$
<b>ΑΔΥΝΑΤΗ</b>	Η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x = \pm \sqrt[n]{\alpha}$	Η εξίσωση έχει μία λύση $x = \sqrt[n]{\alpha}$	Η εξίσωση έχει μία λύση $x = -\sqrt[n]{ \alpha }$