

Συναρτήσεις ▲

Ασκήσεις

I) Πεδίο ορισμού συνάρτησης :

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων και να απλοποιήσετε τους τύπους, όπου αυτό είναι δυνατόν :

$f(x) = -2x^2 + x + 1$	$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - 1}$	$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$	$f(x) = \sqrt{1 - 2x}$
$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 4x + 4}$	$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$	$f(x) = \sqrt{4 - 1 - 2x }$	$f(x) = \frac{\sqrt{1 - 2x}}{\sqrt{x+2}}$
$f(x) = \frac{1}{ 1-x -1}$	$f(x) = \frac{x}{ x +1}$	$f(x) = \sqrt{ 1-2x -5}$	$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$
$f(x) = \frac{x}{ x +x}$	$f(x) = \frac{1}{2 \cdot 1-3x -4}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$	$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

II) Η γραφική παράσταση συνάρτησης – Απόσταση δύο σημείων :

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε την αριθμητική

τιμή των παραστάσεων: $K = f(2) \cdot f(-1) + f(-2) \cdot f(1)$, $A = f(f(-2)) \cdot f(f(1/2))$

2. Να βρείτε σε ποια σημεία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες :

$f(x) = -2x + 1$	$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$	$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2}$	$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 1 \\ x^2-1, & x \leq 1 \end{cases}$	$f(x) = x + \frac{1}{x}$
$f(x) = x-1 + 1$	$f(x) = 1-2x - 2$		

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2-4$. Να βρείτε την απόσταση του σημείου της με τετμημένη $x=1$ από την αρχή των αξόνων.
4. Να βρείτε σημείο A του άξονα $x'x$ που να απέχει από το σημείο $B(0,4)$ απόσταση 5.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$ και τα σημεία της A , B με τετμημένες αντίστοιχα 1 , 2. Να βρείτε σημείο του άξονα $y'y$ που να ισαπέχει από τα A , B.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^2+bx+\gamma$. Αν η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,2)$ και ισχύει $f(0)=1$, να βρείτε τα a , β , γ .
7. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=kx+1$, $k \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να περνά συγχρόνως από τα σημεία $A(3,-2)$ και $B(1,1)$.
8. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x+1$ και $g(x)=x^2-x+1$.
9. Βρείτε το σημείο τομής των συναρτήσεων $f(x)=2x-1$ και $g(x)=x+1$. Στην συνέχεια υπολογίστε την απόσταση του σημείου αυτού από την αρχή των αξόνων.
10. Για ποιες τιμές του x οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-2x+1$, $f(x)=|1-x|-2$, βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$;

III) Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$:

1. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων:

$$y = -2x$$

$$y = 2x$$

$$y = -2x+1$$

$$y = 2x-1$$

Μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα;

2. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x) = -2x - 1, x \in (-1, 1]$	$f(x) = 1 - 2x, x \in (-\infty, 1]$	$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$
$f(x) = x $	$f(x) = 1 - x + 1$	$f(x) = x + 1 - 2 - x - 1$

Σε ποια σημεία τέμνουν τους άξονες ;

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = kx + m$. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, -1)$ και $f(1) = 2$, να υπολογίσετε τα k, m . Μετά να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες ;

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax + \beta, & x \leq 0 \\ c, & 0 < x < 1 \\ kx + m, & 1 \leq x \end{cases}$. Αν είναι γνωστό ότι:

$f(-1) = -2, f(1) = 1, f(1/2) = 1$ και η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(2, 3)$, να υπολογίσετε τα a, β, c, k, m . Να κάνετε στην συνέχεια τη γραφική της παράσταση.

5. Ανακαλύψτε από τις επόμενες ευθείες ποιες είναι παράλληλες και ποιες κάθετες:

$4x - 2y + 1 = 0$	$y = x$	$x + 1 = 0$	$y = -2x + 3$
$x - 3y + 1 = 0$	$y + 1 = 0$	$y - 3 = 0$	$y = -3x + 2$
$y = x + 3$	$x - 3 = 0$	$y + x = 0$	$y = -x + 1$

6. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $y = (\lambda^2 - 1)x + 1$ και $y = 9\lambda + 1)x - 2$ είναι παράλληλες ; Για τις τιμές αυτές του λ , να κάνετε την γραφική τους παράσταση.

7. Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες : $(1-\lambda)x-12y+96=0$ και $(\lambda+1)x-2y-12=0$ είναι κάθετες. Για τις τιμές αυτές του λ να κάνετε την γραφική τους παράσταση.
8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(2,2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $y=-x$. Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες ;
9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(-2,1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $y=2x+1$.
10. Μια ευθεία περνά από το σημείο $P(3,0)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° . Να βρείτε την εξίσωσή της.

IV) Άρτια – Περιττή Συνάρτηση*** Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης :

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές :

$f(x) = 3x, x \in \mathbb{R}$	$f(x) = -2x^2, x \in \mathbb{R}$	$f(x) = \frac{2}{x}, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 3x, x \in (-1,1)$	$f(x) = -2x^2, x \in (-2,2]$	$f(x) = \frac{2}{x}, x \geq 0$
$f(x) = 3x, x \in (-1,1]$	$f(x) = -2x^2, x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$	$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$	$f(x) = 2x^5 - x^3 + 3x$	$f(x) = \frac{2}{ x }$
$f(x) = x-1 + x+1 $	$f(x) = \sqrt{9-x^2}$	$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις :

$f(x) = 3x + 1, x \in (-1, 1)$	$f(x) = -2x^2, x \in [-2, 2]$	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
$f(x) = -3x + 1, x \in (-1, 1]$	$f(x) = x-1 - 2$	$f(x) = \sqrt{1-x}$
$f(x) = 2x^4 - 1$	$f(x) = x(x-2), x \in [1, +\infty)$	$f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$

V) Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ (παραβολή) :

1. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων. Στην συνέχεια να βρείτε από τα διαγράμματα, τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα :

$f(x) = 2x^2 + 1, x \in (-1, 1]$	$f(x) = -2x^2 - x + 3, x \in [-2, 2]$	$f(x) = 2(x-1)^2$
$f(x) = -(x+1)^2 + 1$	$f(x) = x^2 - x$	$f(x) = x^2 - 5x + 6 $
$f(x) = x^2 - 1 $	$f(x) = -x^2 + x , x \in [-2, 2]$	$f(x) = x^2 - 3 x + 2$

2. Η παραβολή $f(x) = (a-\beta+1)x^2 - 2(a+\beta)x + a+\beta+1$ έχει κορυφή $K(2, -1)$. Να υπολογίσετε τα a, β . Στην συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε από το διάγραμμά της τα διαστήματα μονοτονίας της.
3. Η παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0, -1), B(1, 0)$ και $\Gamma(-1/2, 0)$. Βρείτε τα a, β, γ .

VI) Η συνάρτηση $f(x) = a/x$ (υπερβολή) :

1. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων. Στην συνέχεια να βρείτε από τα διαγράμματα, τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα :

$f(x) = \frac{1}{ x }$	$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
$f(x) = \left \frac{1}{x-1} \right $	$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$	$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$