

Συναρτήσεις!

Συνάρτηση f , λέγεται η **διαδικασία** με βάση την οποία σε **κάθε** στοιχείο x ενός συνόλου A αντιστοιχούμε **ακριβώς ένα** στοιχείο ενός άλλου συνόλου B .

Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** (ή σύνολο ορισμού) της συνάρτησης f και το σύνολο B λέγεται **σύνολο τιμών** (ή πεδίο τιμών) της συνάρτησης f και συμβολίζεται με **$f(A)$** .

Έτσι για να ορίσουμε μια συνάρτηση απαιτούνται

- Το πεδίο ορισμού της A
- Το σύνολο τιμών της $f(A)$
- Η εικόνα $f(x)$ κάθε x του A

Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν δίνεται, τότε συμφωνούμε να ορίζουμε το πεδίο ορισμού της A σαν **«το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} για τις τιμές του οποίου έχει νόημα το $f(x)$ »**

Κάθε συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί γραφικά στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Έτσι το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$ με $x \in A$ αποτελεί τη **γραφική παράσταση της συνάρτησης**.

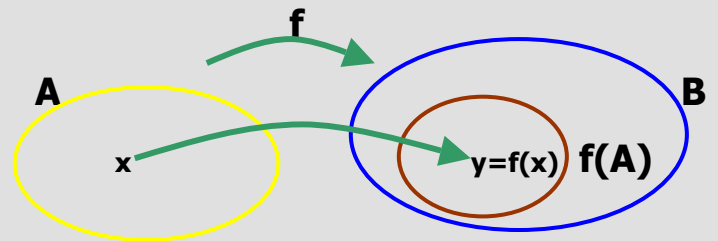
Όσον αφορά ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ας παρατηρήσουμε ότι:

- τα σημεία $A(x, y)$ και $B(x, -y)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x'
- τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, y)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'
- τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-x, -y)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$
- Η απόσταση (AB) των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

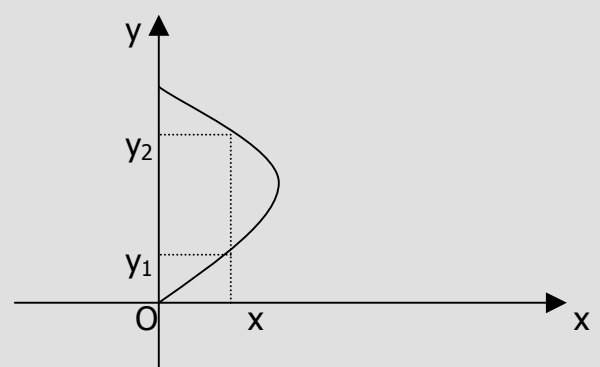
- Ειδικά για τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_1, y_2)$ είναι: **$(AB) = |y_2 - y_1|$** και για τα σημεία

Παρατηρήσεις - Σχόλια



$$f : A \rightarrow B : x \rightarrow y = f(x)$$

- Τα σύνολα A, B θα τα θεωρούμε υποσύνολα του \mathbb{R} .
- Το x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το $y=f(x)$ **εξαρτημένη μεταβλητή**. Λέμε ακόμη ότι το $y=f(x)$ είναι **εικόνα** του x .
- Συνήθως αντί της αντιστοίχισης κάθε x του A στην εικόνα του $y=f(x)$, χρησιμοποιούμε τον **τύπο της συνάρτησης** από τον οποίο για κάθε x μπορούμε να βρούμε την εικόνα του. Έτσι το πεδίο ορισμού δεν χρειάζεται να μας δίνεται αφού μπορούμε να το προσδιορίζουμε.
- Κάθε εξίσωση δεν παριστάνει πάντοτε συνάρτηση π.χ. η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ δεν παριστάνει συνάρτηση διότι λύνοντας ως προς y έχουμε $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και άρα σε κάθε x του $A = [-1, 1]$ **δεν** αντιστοιχεί ακριβώς ένα y (αντιστοιχούν δύο)
- Κάθε καμπύλη δεν είναι πάντοτε γραφική παράσταση συνάρτησης γιατί μπορεί να υπάρχουν x που να αντιστοιχούν περισσότερα του ενός y π.χ



$A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_1)$ είναι:

$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

Αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει μια καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο τότε η καμπύλη αυτή είναι γραφική παράσταση μια συνάρτησης.

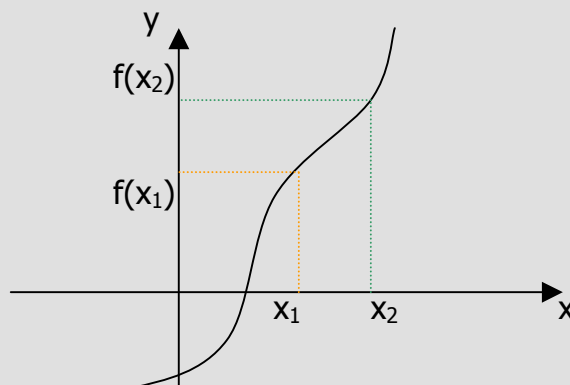
Μονοτονία

- Μία συνάρτηση $f|A$ λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$
- Μία συνάρτηση $f|A$ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$
- Μία συνάρτηση $f|A$ λέγεται **αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) \leq f(x_2)$
- Μία συνάρτηση $f|A$ λέγεται **φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) \geq f(x_2)$
- Μία συνάρτηση γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , λέγεται **γνησίως μονότονη στο Δ** , ενώ μια συνάρτηση αύξουσα ή φθίνουσα στο Δ λέγεται **μονότονη στο Δ** .

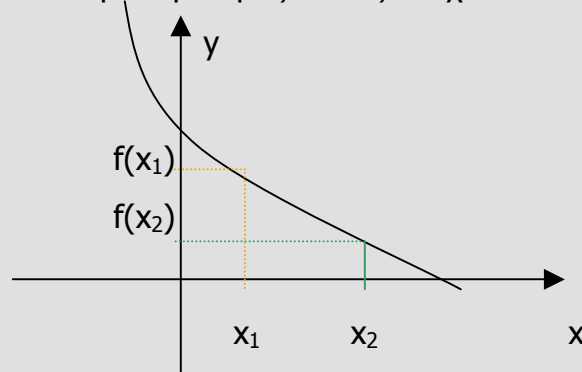
Ακρότατα

- Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f|A$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$, **ελάχιστο το $f(x_0)$** , αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x_0) \leq f(x)$
- Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f|A$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$, **μέγιστο το $f(x_0)$** , αν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$
- Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f (αν υπάρχουν) λέγονται **ακρότατα της f** .

- Κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση έχει γραφική παράσταση γραμμή «ανερχόμενη» από αριστερά προς τα δεξιά π.χ



- Κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση έχει γραφική παράσταση γραμμή «κατερχόμενη» από αριστερά προς τα δεξιά π.χ



- Ο λόγος

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (x_2 \neq x_1) \text{ λέγεται}$$

λόγος μεταβολής της συνάρτησης f και μας δίνει πληροφορίες για την μονοτονία της συνάρτησης f

- ✓ Αν $\lambda > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
- ✓ Αν $\lambda < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
- ✓ Αν $\lambda \geq 0$ τότε η f είναι αύξουσα στο Δ
- ✓ Αν $\lambda \leq 0$ τότε η f είναι φθίνουσα στο Δ
- ✓ Αν $\lambda = 0$ τότε η f είναι σταθερή
- Τα ακρότατα μιας συνάρτησης τα βρίσκουμε από το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Το δε

Άρτια – Περιττή συνάρτηση

- Μία συνάρτηση $f|A$ λέγεται **άρτια** , αν για κάθε x , $-x \in A$ ισχύει: $f(-x)=f(x)$
- Μία συνάρτηση $f|A$ λέγεται **περιττή** , αν για κάθε x , $-x \in A$ ισχύει: $f(-x)=-f(x)$

Μελέτη και Γραφική Παράσταση

συνάρτησης

Για την μελέτη μιας συνάρτησης δηλ. για να αναζητήσουμε ορισμένες ιδιότητές της που θα μας οδηγήσουν στην γραφική της παράσταση, ακολουθούμε τα εξής βήματα

- 📄 Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της A
- 📄 Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $f(A)$ αν είναι δυνατό
- 📄 Από το σύνολο τιμών προσδιορίζουμε τα ακρότατα αν υπάρχουν
- 📄 Εξετάζουμε αν παρουσιάζει συμμετρίες, δηλ. αν είναι άρτια ή περιττή
- 📄 Μελετούμε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της
- 📄 Εξετάζουμε πως συμπεριφέρεται η συνάρτηση για πολύ μεγάλες και πολύ μικρές τιμές του x
- 📄 Κάνουμε ένα πίνακα χαρακτηριστικών τιμών. Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες [για $x=0$ βρίσκουμε που τέμνει τον $y' y$ και για $y=0$ βρίσκουμε που τέμνει τον $x' x$]
- 📄 Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης από τις πληροφορίες που έχουμε μαζέψει από τα προηγούμενα βήματα

Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$

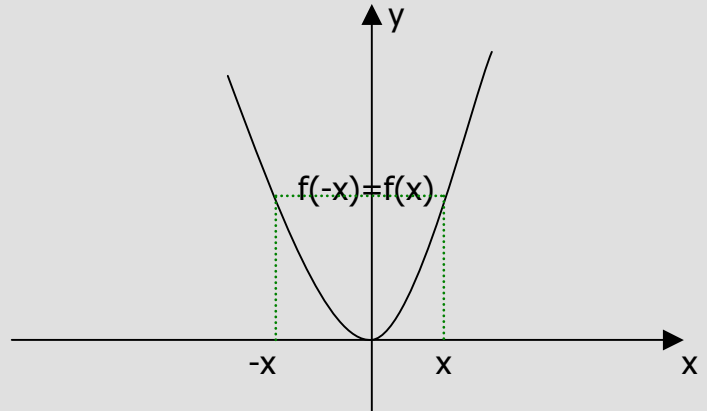
- Κάθε συνάρτηση της μορφής **$f(x)=ax+\beta$** παριστάνει **ευθεία** και για την γραφική της παράσταση αρκούν δύο σημεία της. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

x	0	$-\beta/a$
$y=f(x)$	β	0

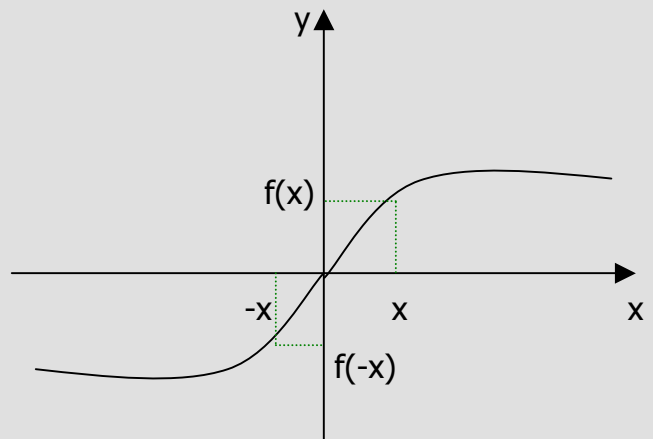
[θέτοντας διαδοχικά $x=0$ και $y=0$ έχουμε το πλεονέκτημα να γνωρίζουμε τα σημεία τομής με

σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(A)$ βρίσκεται από την λύση της εξίσωσης $y=f(x)$ $y \in \mathbb{R}$, $x \in A$ λύνοντας ως προς x .

- Κάθε άρτια ή περιττή συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0
- Κάθε άρτια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση **συμμετρική ως προς τον άξονα $y' y$**



- Κάθε περιττή συνάρτηση έχει γραφική παράσταση **συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων**



Ειδικές περιπτώσεις :

- Η ευθεία **$y=x$** είναι η **διχοτόμος του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου** , ενώ η **$y=-x$** είναι η **διχοτόμος του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου**.
- Αν $a > 0$ τότε $0^0 < \omega < 90^0$
- Αν $a < 0$ τότε $90 < \omega < 180^0$
- Αν $a=0$ τότε $\omega=0^0$ (σταθερή συνάρτηση)

τους άξονες]

- Αν η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων στον πίνακα τιμών δίνουμε στο x τις ακριανές τιμές των διαστημάτων για να γνωρίζουμε από πού αρχίζει και που τελειώνει το διάγραμμα της συνάρτησης
- Η συνάρτηση $f(x)=ax$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$ μπορεί να προκύψει από την $f(x)=ax$ με «**κατακόρυφη μετατόπισή**» της κατά β
- Η συνάρτηση $f(x)=c$ (:σταθερή συνάρτηση) παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, ενώ η ευθεία $x=c$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.
- **Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας :** Αν μια ευθεία (ϵ) : $y=ax+\beta$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A , τότε τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax όταν στραφεί γύρω από το A κατά την θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία (ϵ) , την ονομάζουμε «γωνία που σχηματίζει η (ϵ) με τον άξονα $x'x$ ». Προφανώς είναι: $0^\circ < \omega < 180^\circ$
Ισχύει: **$\epsilon\varphi\omega=a$**
Ο αριθμός **$\epsilon\varphi\omega=a$** καθορίζει την διεύθυνση της ευθείας (ϵ) και λέγεται **συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ϵ)** .

- **Συνθήκη παραλληλίας δύο ευθειών** : Οι ευθείες (ϵ_1) : $y=a_1x+\beta_1$ και (ϵ_2) : $y=a_2x+\beta_2$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης δηλ.
 $(\epsilon_1) // (\epsilon_2)$ αν και μόνο αν $a_1=a_2$
- **Συνθήκη καθετότητας δύο ευθειών** : Οι ευθείες (ϵ_1) : $y=a_1x+\beta_1$ και (ϵ_2) : $y=a_2x+\beta_2$ είναι κάθετες αν και μόνο αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι ίσο με -1 δηλ.
 (ϵ_1) κάθετη με (ϵ_2) αν και μόνο αν $a_1 \cdot a_2 = -1$

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$

(παραβολή)

Αν $a > 0$

1. Πεδίο ορισμού : $A = \mathbb{R}$
2. Σύνολο τιμών : $f(A) = [0, +\infty)$
3. Ακρότατα : Για $x=0$ έχουμε $y_{\min}=f(0)=0$
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f(-x)=f(x)$ δηλ. είναι άρτια και επομένως συμμετρική ως προς τον $y' y$
5. Μονοτονία :

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) < 0$$

και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

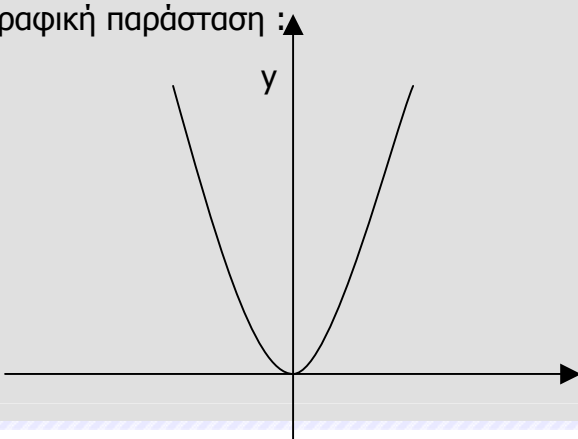
$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) > 0$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

6. Προφανώς όταν ο x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε το $y=f(x)$ τείνει στο $+\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες : $x=0 \leftrightarrow y=0$
8. Πίνακας μεταβολών :

	$-\infty$		0		$+\infty$
	$+\infty$		0		$+\infty$

9. Γραφική παράσταση :



Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$

(υπερβολή)

Αν $a > 0$

1. Πεδίο ορισμού : $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2. Σύνολο τιμών : $f(A) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Ακρότατα : Δεν υπάρχουν
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f(-x) = -f(x)$ δηλ. είναι περιττή και επομένως συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.

5. Μονοτονία :

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}}{x_2 - x_1} = \dots < 0$$

και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}}{x_2 - x_1} = \dots < 0$$

και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

6. Προφανώς όταν ο x τείνει στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ τότε ο $y=f(x)$ τείνει στο $-\infty$
Όταν ο x τείνει στο 0 από αριστερά τότε ο $y=f(x)$ τείνει στο $-\infty$ και όταν ο x τείνει στο 0 από δεξιά τότε ο $y=f(x)$ τείνει στο $+\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες: Δεν υπάρχουν
8. Πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y=f(x)=a/x$	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

9. Γραφική παράσταση :

0 x

Av $a < 0$

1. Πεδίο ορισμού : $A = \mathbb{R}$
2. Σύνολο τιμών : $f(A) = (-\infty, 0]$
3. Ακρότατα : Για $x=0$ έχουμε $y_{\max}=f(0)=0$
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f(-x)=f(x)$ δηλ. είναι άρτια και επομένως συμμετρική ως προς τον $y' y$
5. Μονοτονία :

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) > 0$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

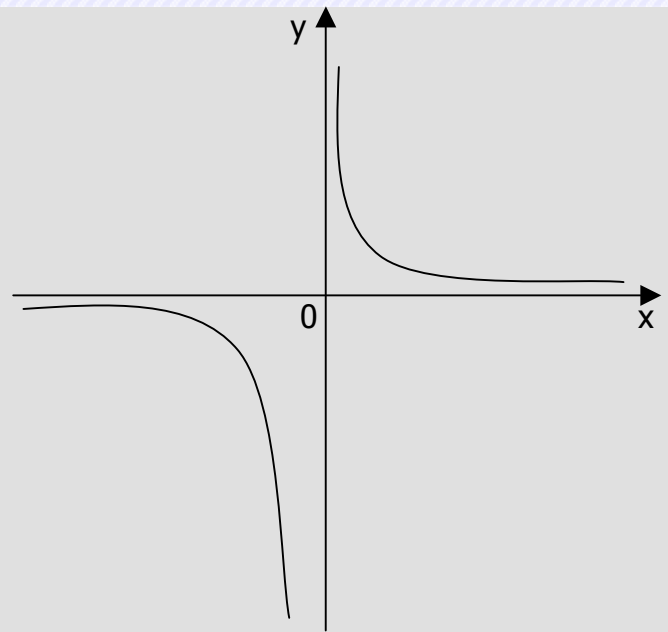
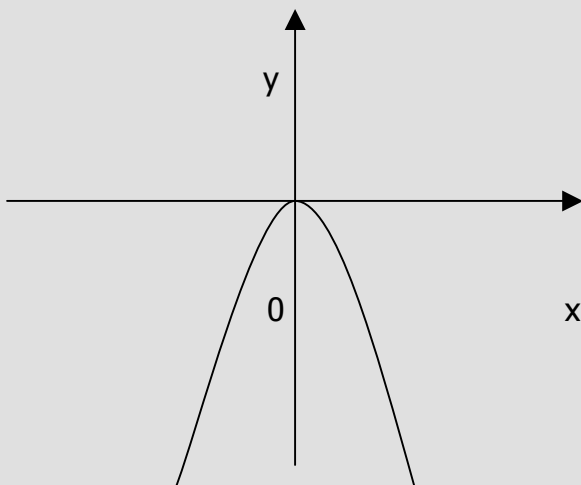
Στο διάστημα $(0, +\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) < 0$$

και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

6. Προφανώς όταν ο x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε το $y=f(x)$ τείνει στο $-\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες : $x=0 \leftrightarrow y=0$
8. Πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$		0	$+\infty$
		↗	↘	
	$-\infty$		$-\infty$	



Av $a < 0$

1. Πεδίο ορισμού : $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2. Σύνολο τιμών : $f(A) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Ακρότατα : Δεν υπάρχουν
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f(-x) = -f(x)$ δηλ. είναι περιττή και επομένως συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.
5. Μονοτονία :

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{a}{x_2^2} - \frac{a}{x_1^2}}{x_2 - x_1} = \dots > 0$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{a}{x_2^2} - \frac{a}{x_1^2}}{x_2 - x_1} = \dots > 0$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

6. Προφανώς όταν ο x τείνει στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ τότε ο $y=f(x)$ τείνει στο $-\infty$
Όταν ο x τείνει στο 0 από αριστερά τότε ο $y=f(x)$ τείνει στο $-\infty$ και όταν ο x τείνει στο 0 από δεξιά τότε ο $y=f(x)$ τείνει στο $+\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες: Δεν υπάρχουν

