

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Δίνεται η εξίσωση  $2x - 4 = 0$ 
  - ✓ Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αυτή;
  - ✓ Σε ποια σημεία η ευθεία  $y = 2x - 4$ , τέμνει τους άξονες;
  - ✓ Να κάνετε τη γραφική παράσταση της προηγούμενης ευθείας.
2. Δίνεται η εξίσωση:  $2x - 3y = 6$ 
  - ✓ Πόσους αγνώστους έχει η εξίσωση αυτή;
  - ✓ Το ζεύγος τιμών  $(x = 6, y = 2)$  αποτελεί λύση της εξίσωσης;
  - ✓ Το ζεύγος τιμών  $(x = 1, y = -1)$  αποτελεί λύση της εξίσωσης;
  - ✓ Μπορείτε να βρείτε ένα ζευγάρι τιμών  $(x, y)$  που να αποτελεί λύση της εξίσωσης;
  - ✓ Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αυτή;
  - ✓ Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας ( $\epsilon$ ):  $2x - 3y = 6$
  - ✓ Να επιλέξετε δύο σημεία της ευθείας αυτής και να εξετάσετε αν αυτά αποτελούν λύση της εξίσωσης
  - ✓ Μήπως οι συν/νες όλων των σημείων της ευθείας αυτής αποτελούν λύση της εξίσωσης;
  - ✓ Υπάρχουν σημεία εκτός της ευθείας ( $\epsilon$ ) που οι συν/νες τους να αποτελούν λύση της εξίσωσης;
3. Δίνονται οι εξισώσεις:  $(\epsilon_1) 2x + y = 3$  και  $(\epsilon_2) 3x - y = 2$ 
  - ✓ Οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες ή τέμνονται; ( γιατί; )
  - ✓ Πόσες λύσεις έχει κάθε μια από αυτές τις εξισώσεις;
  - ✓ Να κάνετε τη γραφική παράσταση των ευθειών αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων
  - ✓ Που βρίσκονται οι λύσεις των εξισώσεων αυτών στο σχήμα;
  - ✓ Υπάρχουν κοινές λύσεις των εξισώσεων αυτών; Ποιες είναι οι κοινές λύσεις;
4. Δίνονται οι εξισώσεις:  $(\epsilon_1) 2x + y = 3$  και  $(\epsilon_2) 2x + y = 2$ 
  - ✓ Να απαντήσετε στα προηγούμενα ερωτήματα
5. Δίνονται οι εξισώσεις:  $(\epsilon_1) 2x + y = 3$  και  $(\epsilon_2) 4x + 2y = 6$ 
  - ✓ Να απαντήσετε στα προηγούμενα ερωτήματα

**Ορισμός:** Ένα σύνολο δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού με δύο αγνώστους λέγεται πρωτοβάθμιο ή γραμμικό (επειδή η γραφική τους παράσταση είναι ευθεία γραμμή) σύστημα 2X2

**Ορισμός:** Λύση του συστήματος λέγεται το ζευγάρι τιμών  $(x, y)$  που επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις.

**Ορισμός:** Επίλυση του συστήματος λέγεται η διαδικασία ( δουλειά ) που κάνουμε για να βρούμε τη λύση του συστήματος

### **Ασκήσεις για εμπέδωση :**

Ποια από τα επόμενα συστήματα έχουν μια μοναδική λύση; Ποια είναι αδύνατα; Ποια έχουν άπειρες λύσεις ( ποια είναι η μορφή των λύσεων );

$$(\Sigma_1): \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}, \quad (\Sigma_2): \begin{cases} 3x - y = 4 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}, \quad (\Sigma_3): \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases}$$

Να κάνετε τη γραφική παράσταση ( σε διαφορετικό σύστημα αξόνων για κάθε σύστημα )

### **ΣΧΟΛΙΟ :**

Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

- ✓ Αν  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$  τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- ✓ Αν  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$  τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- ✓ Αν  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$  τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

***[www.aris-nikolaidis.tk](http://www.aris-nikolaidis.tk)***

## ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2Χ2 :

### 1<sup>ος</sup> τρόπος : Γραφικά

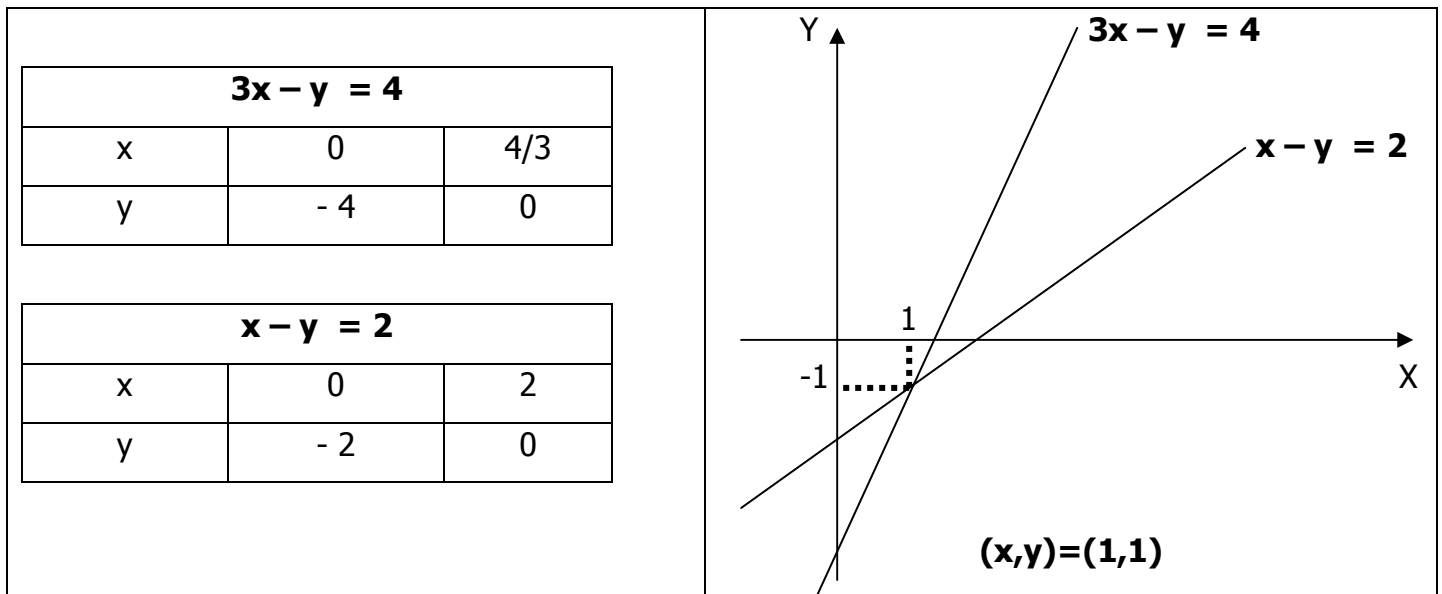
Παριστάνουμε γραφικά τις δύο εξισώσεις.

- ✓ Αν οι ευθείες τους τέμνονται, το σύστημα έχει μια μοναδική λύση, τις συν/νες του σημείου τομής τους.
- ✓ Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- ✓ Αν οι ευθείες ταυτίζονται, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ( οι δύο εξισώσεις είναι μία, η ίδια )

Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Να λύσετε γραφικά το σύστημα: 
$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

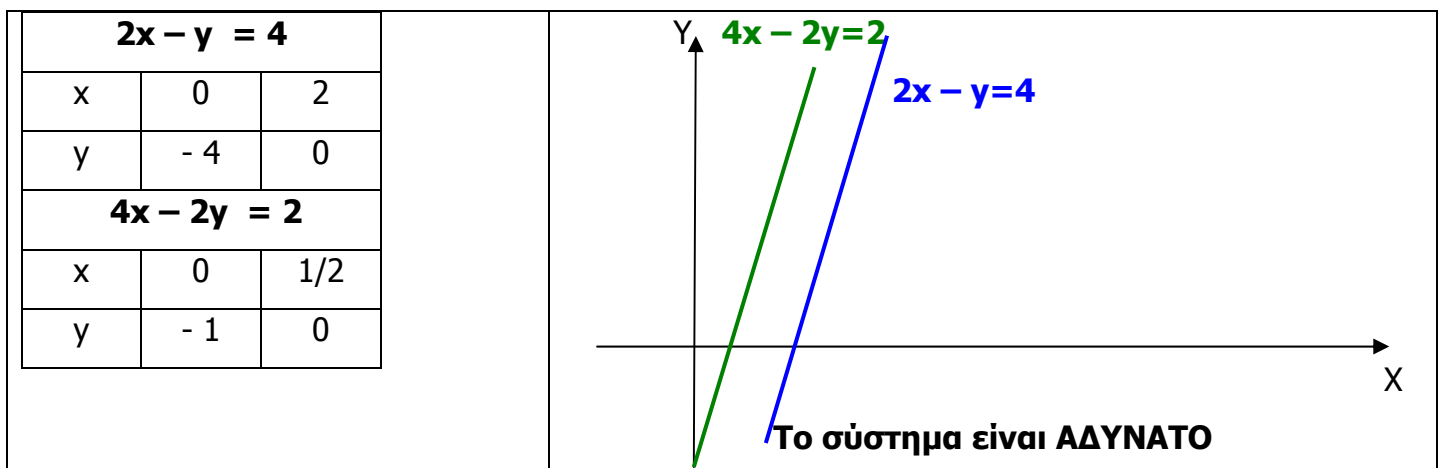
Λύση :



Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Να λύσετε γραφικά το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

Λύση :



## 2<sup>ος</sup> τρόπος : Μέθοδος αντικατάστασης

Λύνουμε την μια εξίσωση ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Έτσι προκύπτει μια εξίσωση ως προς ένα άγνωστο, την οποία και λύνουμε

Παράδειγμα :

$$\text{Να λύσετε το σύστημα: } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Λύση :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y + 2) - y = 4 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 6 - y = 4 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -2 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

## 3<sup>ος</sup> τρόπος : Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Επιλέγουμε ένα άγνωστο και δημιουργούμε σε αυτόν αντίθετους συντελεστές πολ/ζοντας και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς

Παράδειγμα :

$$\text{Να λύσετε το σύστημα: } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Λύση :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \left| \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ -3x + 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

#### 4<sup>ος</sup> τρόπος : Μέθοδος των οριζουσών

Ορίζουσα 2X2 ονομάζουμε μια διάταξη τεσσάρων αριθμών  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ως εξής:  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ .

Μια ορίζουσα ισούται με:  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$

Π.χ  $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4) - 3 \cdot (-5) = 8 + 15 = 23$

Έστω το σύστημα  $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων  $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1$

Βρίσκουμε την ορίζουσα  $D_x$  ( στην ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων αντικαθιστούμε τη στήλη των συντελεστών του x με τους σταθερούς όρους )  $D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 \cdot \beta_2 - \gamma_2 \cdot \beta_1$

Βρίσκουμε την ορίζουσα  $D_y$  ( στην ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων αντικαθιστούμε τη στήλη των συντελεστών του y με τους σταθερούς όρους )  $D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \gamma_2 - \alpha_2 \cdot \gamma_1$

- ✓ Αν  $D \neq 0$ , τότε το σύστημα έχει μια μοναδική λύση  $x = \frac{D_x}{D}$ ,  $y = \frac{D_y}{D}$
- ✓ Αν  $D = 0$  και  $D_x \neq 0$  ή  $D_y \neq 0$ , τότε το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.
- ✓ Αν  $D = D_x = D_y = 0$ , τότε το σύστημα είναι ΑΟΡΙΣΤΟ ή ΑΔΥΝΑΤΟ.

[www.aris-nikolaidis.tk](http://www.aris-nikolaidis.tk)

Παράδειγμα :

Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Λύση :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση:  $x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = -1$

### ΣΧΟΛΙΟ :

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με γραμμικά συστήματα 2X2. Υπάρχουν και γραμμικά συστήματα 3X3 δηλαδή τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, 4X4, 5X5, κ.λ.π.

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3X3, δουλεύουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης, όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα :

$$\begin{cases} 2x - 3y + \omega = 0 \\ 3x + y + \omega = 5 \\ 3x - y + 2\omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 3y - 2x \\ 3x + y + 3y - 2x = 5 \\ 3x - y + 2(3y - 2x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 3y - 2x \\ x + 4y = 5 \\ -x + 5y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 3y - 2x \\ x + 4y = 5 \\ 9y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 3y - 2x \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 1 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ δηλαδή } (x, y, \omega) = (1, 1, 1)$$

Όμοια λύνονται και τα γραμμικά συστήματα 4X4, 5X5, κ.λ.π.

[www.aris-nikolaidis.tk](http://www.aris-nikolaidis.tk)

## ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

### ( ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ )

Αν μια ή περισσότερες εξισώσεις ενός συστήματος είναι δευτεροβάθμια, τότε το σύστημα λέγεται δευτεροβάθμιο σύστημα. Εδώ θα ασχοληθούμε με δευτεροβάθμια συστήματα, όπου η μια εξίσωση είναι 1<sup>ου</sup> βαθμού και η άλλη εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού.

Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος, δουλεύουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Ποιο συγκεκριμένα, λύνουμε την πρωτοβάθμια ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε στη δευτεροβάθμια.

Παράδειγμα :

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Λύση :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - x(2x - 1) + (2x - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - 2x^2 + x + 4x^2 - 4x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 & y = 2x - 1 \\ x = 0 & \quad \quad \quad \text{ή} \\ & \quad \quad \quad x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 & y = 1 \\ x = 0 & \quad \quad \quad \text{ή} \\ & \quad \quad \quad x = 1 \end{cases}$$

***[www.aris-nikolaidis.tk](http://www.aris-nikolaidis.tk)***

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1)** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα ( με 4 τρόπους τα πρωτοβάθμια συστήματα) :

$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha - \beta = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = 2 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -6x - 4y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 9x + 6y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2(x-y)}{3} - \frac{x+y+1}{2} = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y - \omega = -4 \\ 2x - y - 2\omega = 1 \\ x - y - \omega = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + xy - y^2 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

**2)** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \alpha \cdot x^2 + (\beta - 2 \cdot \alpha) \cdot x + \beta - 1$

Αν είναι γνωστό ότι  $f(1) = -5$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 5)$ , να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$ . Μετά για τις τιμές αυτές των  $\alpha$ ,  $\beta$ , να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**3)** Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + \lambda y = 2\lambda \end{cases}$$

- ✓ Για ποιες τιμές του  $\lambda$ , το σύστημα έχει μια μοναδική λύση; Ποια είναι η λύση αυτή;
- ✓ Για ποιες τιμές του  $\lambda$ , το σύστημα είναι αδύνατο;
- ✓ Για ποιες τιμές του  $\lambda$ , το σύστημα έχει άπειρες λύσεις;

**4)** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 2\alpha + 2\beta - 2 \\ (3\alpha + 1)x - 2(\beta + 1)y = \alpha + \beta \end{cases}$$
. Να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$  ώστε το σύστημα να

έχει λύση ( $x=1$ ,  $y=1$ )

***www.aris-nikolaidis.tk***



- 5) Σε ένα γραμμικό σύστημα 2X2 είναι:  $D=2$  ,  $D_x=6$  ,  $D_y= -4$ . Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
- A) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις  
 B) Το σύστημα αληθεύει μόνο για το ζεύγος τιμών  $(x,y) =(3,-2)$   
 Γ) Οι ευθείες που παριστούν οι δύο εξισώσεις του συστήματος είναι παράλληλες  
 Δ) Οι ευθείες που παριστούν οι δύο εξισώσεις του συστήματος τέμνονται σε σημείο που βρίσκεται στο 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο
- 6) Σε ένα γραμμικό σύστημα 2X2 είναι:  $( D -2 )^2 + (D_x -1)^2 + D_y = 0$ . Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
- A) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις  
 B) Το σύστημα είναι αδύνατο  
 Γ) Το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x,y)=(1/2 , 0)$
- 7) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραμμών :  $y=x$  και  $y=x^3$  .
- 8) Ορθογωνίου παραλληλογράμμου η περίμετρος είναι 10m και το εμβαδόν του  $6m^2$  . Να βρείτε τις πλευρές του παραλληλογράμμου.

9) Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} 3x + y = 2\lambda \\ 2x + y = \lambda \end{cases}$$

- A) Να αποδείξετε ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση  $(x_0 , y_0)$   
 B) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες ισχύει:  $x_0^2 = y_0$

10) Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} 3x + y = \lambda^2 - \mu^2 \\ 6x + 2y = \lambda - 1 \end{cases}$$

. Για ποιες τιμές των  $\lambda$  ,  $\mu$  το σύστημα έχει λύση

$(x,y)=(0,0)$  ; Έχει άλλες λύσεις το σύστημα αυτό;

[www.aris-nikolaidis.tk](http://www.aris-nikolaidis.tk)

**11)** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα ( συστήματα με τεχνάσματα ) :

$\begin{cases}  x  +  y  = 1 \\  x  -  y  = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y+1} = 5 \\ \frac{3}{x-1} - \frac{2}{y+1} = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} x + y + \omega = 3 \\ y + \omega + z = 4 \\ \omega + z + x = 4 \\ z + x + y = 4 \end{cases}$			

**12)** Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} \lambda \cdot x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda \cdot y = 2 \cdot \lambda \end{cases}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να λυθεί το σύστημα.
- β) Αν  $(x_0, y_0)$  είναι μια λύση του παραπάνω συστήματος, να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες είναι:  $x_0 + y_0 = 1$

[www.aris-nikolaidis.tk](http://www.aris-nikolaidis.tk)