ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Δίνεται η εξίσωση $2x - 4 = 0$
   - ✓ Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αυτή;
   - ✓ Σε ποια σημεία η ευθεία $y = 2x - 4$, τέμνει τους άξονες;
   - ✓ Να κάνετε τη γραφική παράσταση της προηγούμενης ευθείας.

2. Δίνεται η εξίσωση: $2x - 3y = 6$
   - ✓ Πόσους αγνώστους έχει η εξίσωση αυτή;
   - ✓ Το ζεύγος τιμών $(x = 6, y = 2)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης;
   - ✓ Το ζεύγος τιμών $(x = 1, y = -1)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης;
   - ✓ Μπορείτε να βρείτε ένα ζευγάρι τιμών (x, y) που να αποτελεί λύση της εξίσωσης;
   - ✓ Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αυτή;
   - ✓ Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας (ε): $2x - 3y = 6$
   - ✓ Να επιλέξετε δύο σημεία της ευθείας αυτής και να εξετάσετε αν αυτά αποτελούν λύση της εξίσωσης
   - ✓ Μήπως οι συν/νες όλων των σημείων της ευθείας αυτής αποτελούν λύση της εξίσωσης;
   - ✓ Υπάρχουν σημεία εκτός της ευθείας (ε) που οι συν/νες τους να αποτελούν λύση της εξίσωσης;

3. Δίνονται οι εξισώσεις: (ε_1) $2x + y = 3$ και (ε_2) $3x - y = 2$
   - ✓ Οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες ή τέμνονται; (γιατί;)
   - ✓ Πόσες λύσεις έχει κάθε μια από αυτές τις εξισώσεις;
   - ✓ Να κάνετε τη γραφική παράσταση των ευθειών αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων
   - ✓ Που βρίσκονται οι λύσεις των εξισώσεων αυτών στο σχήμα;
   - ✓ Υπάρχουν κοινές λύσεις των εξισώσεων αυτών; Ποιες είναι οι κοινές λύσεις;

4. Δίνονται οι εξισώσεις: (ε_1) $2x + y = 3$ και (ε_2) $2x + y = 2$
   - ✓ Να απαντήσετε στα προηγούμενα ερωτήματα

5. Δίνονται οι εξισώσεις: (ε_1) $2x + y = 3$ και (ε_2) $4x + 2y = 6$
   - ✓ Να απαντήσετε στα προηγούμενα ερωτήματα

Ορισμός: Ένα σύνολο δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού με δύο αγνώστους λέγεται πρωτοβάθμιο ή γραμμικό (επειδή η γραφική τους παράσταση είναι ευθεία γραμμή) σύστημα 2Χ2

Ορισμός: Λύση του συστήματος λέγεται το ζευγάρι τιμών (x , y) που επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις.

Ορισμός: Επίλυση του συστήματος λέγεται η διαδικασία (δουλειά) που κάνουμε για να βρούμε τη λύση του συστήματος

Ασκήσεις για εμπέδωση :

Ποια από τα επόμενα συστήματα έχουν μια μοναδική λύση; Ποια είναι αδύνατα; Ποια έχουν άπειρες λύσεις (ποια είναι η μορφή των λύσεων);

$(\Sigma_1): \left\{\begin{matrix} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{matrix}\right\}$, $(\Sigma_2): \left\{\begin{matrix} 3x - y = 4 \\ -6x + 2y = -4 \end{matrix}\right\}$, $(\Sigma_3): \left\{\begin{matrix} 3x - y = 4 \\ 6x - 2y = 8 \end{matrix}\right\}$

Να κάνετε τη γραφική παράσταση (σε διαφορετικό σύστημα αξόνων για κάθε σύστημα)

ΣΧΟΛΙΟ :

Δίνεται το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{matrix}\right\}$

- ✓ Αν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- ✓ Αν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} \neq \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- ✓ Αν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2Χ2 :

1ος τρόπος : Γραφικά

Παριστάνουμε γραφικά τις δύο εξισώσεις.

- ✓ Αν οι ευθείες τους τέμνονται, το σύστημα έχει μια μοναδική λύση, τις συν/νες του σημείου τομής τους.
- ✓ Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- ✓ Αν οι ευθείες ταυτίζονται, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (οι δύο εξισώσεις είναι μία, η ίδια)

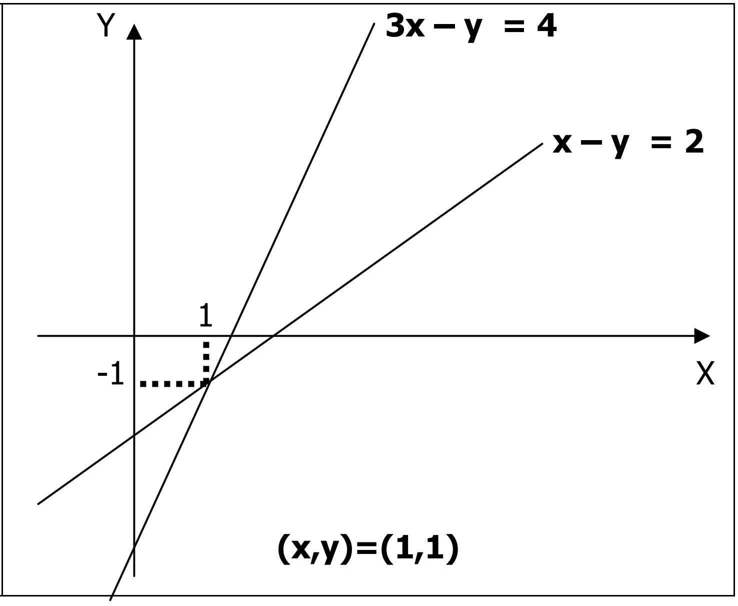
Παράδειγμα 1ο:

Να λύσετε γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Λύση :

3x – y = 4		
x	0	4/3
y	- 4	0

x – y = 2		
x	0	2
y	- 2	0

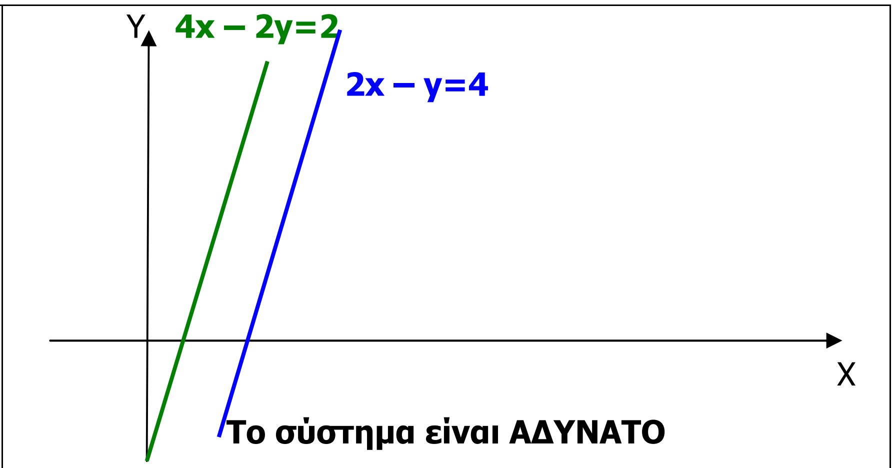


Παράδειγμα 2ο:

Να λύσετε γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

Λύση :

2x – y = 4		
x	0	2
y	- 4	0
4x – 2y = 2		
x	0	1/2
y	- 1	0



$2^{ος}$ τρόπος : Μέθοδος αντικατάστασης

Λύνουμε την μια εξίσωση ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Έτσι προκύπτει μια εξίσωση ως προς ένα άγνωστο, την οποία και λύνουμε

Παράδειγμα :

Να λύσετε το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

Λύση :

$$\left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ x=y+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3(y+2)-y=4 \\ x=y+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3y+6-y=4 \\ x=y+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2y=-2 \\ x=y+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=-1 \\ x=y+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=-1 \\ x=1 \end{array}\right\}$$

$3^{ος}$ τρόπος : Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Επιλέγουμε ένα άγνωστο και δημιουργούμε σε αυτόν αντίθετους συντελεστές πολ/ζοντας και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς

Παράδειγμα :

Να λύσετε το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

Λύση :

$$\left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 1 \\ -3 \end{array}\left|\left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ -3x+3y=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ 2y=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x-y=4 \\ y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x+1=4 \\ y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ y=-1 \end{array}\right\}$$

4^{ος} τρόπος : Μέθοδος των οριζουσών

Ορίζουσα 2Χ2 ονομάζουμε μια διάταξη τεσσάρων αριθμών α , β ,γ ,δ ως εξής: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

Μια ορίζουσα ισούται με: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$

Π.Χ $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-4) - 3\cdot(-5) = 8 + 15 = 23$

Έστω το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma 2 \end{array} \right\}$

Βρίσκουμε την ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1$

Βρίσκουμε την ορίζουσα D_x (στην ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων αντικαθιστούμε τη στήλη των συντελεστών του x με τους σταθερούς όρους) $D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 \cdot \beta_2 - \gamma_2 \cdot \beta_1$

Βρίσκουμε την ορίζουσα D_y (στην ορίζουσα D των συντελεστών των αγνώστων αντικαθιστούμε τη στήλη των συντελεστών του y με τους σταθερούς όρους) $D_x = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \gamma_2 - \alpha_2 \cdot \gamma_1$

- ✓ Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μια μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$
- ✓ Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$, τότε το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.
- ✓ Αν $D = D_x = D_y = 0$, τότε το σύστημα είναι ΑΟΡΙΣΤΟ ή ΑΔΥΝΑΤΟ.

Παράδειγμα :

Να λύσετε το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} 3x - y = 4 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

Λύση :

$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση: $x = \dfrac{D_x}{D} = 1$, $y = \dfrac{D_y}{D} = -1$

ΣΧΟΛΙΟ :

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με γραμμικά συστήματα 2Χ2. Υπάρχουν και γραμμικά συστήματα 3Χ3 δηλαδή τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, 4Χ4 , 5Χ5, κ.λ.π.

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3Χ3, δουλεύουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης, όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα :

$$\left\{\begin{array}{c} 2x - 3y + \omega = 0 \\ 3x + y + \omega = 5 \\ 3x - y + 2\omega = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \omega = 3y - 2x \\ 3x + y + 3y - 2x = 5 \\ 3x - y + 2(3y - 2x) = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \omega = 3y - 2x \\ x + 4y = 5 \\ -x + 5y = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \omega = 3y - 2x \\ x + 4y = 5 \\ 9y = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \omega = 3y - 2x \\ x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \omega = 1 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\} , \text{ δηλαδή } (x, y, \omega) = (1, 1, 1)$$

Όμοια λύνονται και τα γραμμικά συστήματα 4Χ4 , 5Χ5 , κ.λ.π.

www.aris-nikolaidis.tk

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

(ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ)

Αν μια ή περισσότερες εξισώσεις ενός συστήματος είναι δευτεροβάθμια, τότε το σύστημα λέγεται δευτεροβάθμιο σύστημα. Εδώ θα ασχοληθούμε με δευτεροβάθμια συστήματα, όπου η μια εξίσωση είναι 1^{ου} βαθμού και η άλλη εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος, δουλεύουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Ποιο συγκεκριμένα, λύνουμε την πρωτοβάθμια ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε στη δευτεροβάθμια.

<u>Παράδειγμα</u> :

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} 2x - y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{Bmatrix}$$

Λύση :

$$\begin{Bmatrix} 2x - y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2x - 1 \\ x^2 - x(2x-1) + (2x-1)^2 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2x - 1 \\ x^2 - 2x^2 + x + 4x^2 - 4x + 1 = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2x - 1 \\ 3x^2 - 3x = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2x - 1 \\ 3x(x-1) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2x - 1 \\ x = 0 \quad ή \quad x = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2x - 1 & & y = 2x - 1 \\ & ή & \\ x = 0 & & x = 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = -1 & & y = 1 \\ & ή & \\ x = 0 & & x = 1 \end{Bmatrix}$$

www.aris-nikolaidis.tk

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα (με 4 τρόπους τα πρωτοβάθμια συστήματα) :

$\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta=-1 \\ \alpha-\beta=3 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} \frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}=2 \\ \alpha-\beta=1 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y=-1 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y=-1 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right\}$
$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y=-1 \\ -6x-4y=2 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y=-1 \\ 9x+6y=3 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} \frac{2(x-y)}{3}-\frac{x+y+1}{2}=0 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=-\frac{3}{2} \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y-\omega=-4 \\ 2x-y-2\omega=1 \\ x-y-\omega=1 \end{array}\right\}$
$\left\{\begin{array}{c} 3x-y=2 \\ x^2-y^2=0 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} x-y=-1 \\ x^2+xy-y^2=-1 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=0 \end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \\ 2x-3y=5 \end{array}\right\}$

2) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\alpha\cdot x^2+(\beta-2\cdot\alpha)\cdot x+\beta-1$

Αν είναι γνωστό ότι $f(1)=-5$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,5)$, να βρείτε τα α , β. Μετά για τις τιμές αυτές των α , β , να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

3) Δίνεται το σύστημα : $\left\{\begin{array}{c} \lambda x+y=2 \\ x+\lambda y=2\lambda \end{array}\right\}$

- ✓ Για ποιες τιμές του λ, το σύστημα έχει μια μοναδική λύση; Ποια είναι η λύση αυτή;
- ✓ Για ποιες τιμές του λ, το σύστημα είναι αδύνατο;
- ✓ Για ποιες τιμές του λ, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις;

4) Δίνεται το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} \alpha x+\beta y=2\alpha+2\beta-2 \\ (3\alpha+1)x-2(\beta+1)y=\alpha+\beta \end{array}\right\}$. Να βρείτε τα α , β ώστε το σύστημα να έχει λύση (x=1 , y=1)

5) Σε ένα γραμμικό σύστημα 2Χ2 είναι: $D=2$, $D_x=6$, $D_y=-4$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

A) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

B) Το σύστημα αληθεύει μόνο για το ζεύγος τιμών $(x,y)=(3,-2)$

Γ) Οι ευθείες που παριστούν οι δύο εξισώσεις του συστήματος είναι παράλληλες

Δ) Οι ευθείες που παριστούν οι δύο εξισώσεις του συστήματος τέμνονται σε σημείο που βρίσκεται στο 3^0 τεταρτημόριο

6) Σε ένα γραμμικό σύστημα 2Χ2 είναι: $(D-2)^2+(D_x-1)^2+D_y=0$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

A) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

B) Το σύστημα είναι αδύνατο

Γ) Το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=(1/2\ ,\ 0)$

7) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραμμών : $y=x$ και $y=x^3$.

8) Ορθογωνίου παραλληλογράμμου η περίμετρος είναι 10m και το εμβαδόν του $6m^2$. Να βρείτε τις πλευρές του παραλληλογράμμου.

9) Δίνεται το σύστημα : $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=2\lambda \\ 2x+y=\lambda \end{array}\right\}$

A) Να αποδείξετε ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση $(x_0\ ,\ y_0)$

B) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει: $x_0^2=y_0$

10) Δίνεται το σύστημα : $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=\lambda^2-\mu^2 \\ 6x+2y=\lambda-1 \end{array}\right\}$. Για ποιες τιμές των λ , μ το σύστημα έχει λύση $(x,y)=(0,0)$; Έχει άλλες λύσεις το σύστημα αυτό;

11) Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα (συστήματα με τεχνάσματα) :

$\begin{cases} \lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 1 \\ \lvert x\rvert - \lvert y\rvert = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{y+1} = 5 \\ \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{y+1} = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} x + y + \omega = 3 \\ y + \omega + z = 4 \\ \omega + z + x = 4 \\ z + x + y = 4 \end{cases}$			

12) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda \cdot x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda \cdot y = 2 \cdot \lambda \end{cases}$, $\lambda \in IR$.

α) Να λυθεί το σύστημα.

β) Αν (x_0 , y_0) είναι μια λύση του παραπάνω συστήματος, να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες είναι: $x_0 + y_0 = 1$