

Ακολουθίες

Αριθμητική – Γεωμετρική Πρόοδος

Μία συνάρτηση a με πεδίο ορισμού το \mathbb{N}^* λέγεται ακολουθία και συμβολίζεται με (a_n) δηλ.

$$a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} : n \rightarrow a_n = a(n)$$

Ο a_1 λέγεται πρώτος όρος της ακολουθίας, ο a_2 δεύτερος όρος, ..., ο a_n λέγεται n -ιοστός όρος της ακολουθίας.

Μία ακολουθία περιγράφεται συνήθως

- Με τον τύπο της, π.χ $a_n = 2n^2 + 1$ ή
- Με τον αναδρομικό της τύπο, δηλ. μία σχέση που συνδέει κάποιον όρο με προηγούμενους όρους, αρκεί να δίνονται κάποιοι αρχικοί όροι ώστε να μπορούν να προκύπτουν όλοι οι όροι της ακολουθίας π.χ. $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ με $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Σχόλιο : Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας δεν είναι «συνεχόμενη» γραμμή, αλλά σύνολο μεμονωμένων σημείων που βρίσκονται στο 1^0 ή 4^0 τεταρτημόριο (λόγω του πεδίου ορισμού της).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός : **Αριθμητική Πρόοδος** λέγεται μία ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + \omega$, $n \in \mathbb{N}^*$, όπου ω σταθερός αριθμός (λέγεται **διαφορά** της Α.Π.) δηλ.

η Α.Π είναι μια ακολουθία όπου κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε σταθερού αριθμού ω .

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot \omega \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

Τρεις αριθμοί a , β , γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π

αν και μόνο αν $\beta = \frac{a + \gamma}{2}$ (ο β λέγεται

αριθμητικός μέσος των a και γ)

Το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων Α.Π είναι :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)\omega}{2} \cdot n$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός : **Γεωμετρική Πρόοδος** λέγεται μία ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n \cdot \lambda$, $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda \neq 0$ σταθερός αριθμός (λέγεται **λόγος** της Γ.Π) και $a_1 \neq 0$ δηλ.

η Γ.Π είναι μια ακολουθία όπου κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντοτε σταθερού αριθμού $\lambda \neq 0$.

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί a , β , γ είναι

διαδοχικοί όροι Γ.Π αν και μόνο αν **$\beta^2 = a \cdot \gamma$**

(ο $\beta = \sqrt{a \cdot \gamma}$ λέγεται γεωμετρικός

μέσος των a και γ)

Το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων Γ.Π με $\lambda \neq$

1 είναι : $S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$ και

$$S_v = v \cdot a_1, \quad \text{αν } \lambda=1$$

Παρατηρήσεις :

1. Το άθροισμα των συμμετρικών όρων μιας Α.Π παραμένει ίδιο δηλ.
 $a_1 + a_v = a_2 + a_{v-1} = a_3 + a_{v-2} = \dots$
2. Όταν δίνεται μια ακολουθία και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι Α.Π αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά δύο οποιονδήποτε διαδοχικών όρων της παραμένει σταθερή δηλ. $a_{v+1} - a_v = \dots = \text{σταθ.}$

Παρατηρήσεις :

1. Το γινόμενο των συμμετρικών όρων μιας Γ.Π παραμένει ίδιο δηλ.
 $a_1 \cdot a_v = a_2 \cdot a_{v-1} = a_3 \cdot a_{v-2} = \dots$
2. Όταν δίνεται μια ακολουθία και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι Γ.Π αρκεί να δείξουμε ότι ο λόγος δύο οποιονδήποτε διαδοχικών όρων της παραμένει σταθερός δηλ. $a_{v+1}/a_v = \dots = \text{σταθ.}$

Μία ακολουθία λέγεται **Αρμονική Πρόοδος** αν και μόνο αν οι αντίστροφοι των όρων της αποτελούν **αριθμητική πρόοδο**, δηλ. η ακολουθία a_1, a_2, \dots, a_v είναι αρμονική πρόοδος αν και μόνο αν η ακολουθία $1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_v$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Ασκήσεις:

1. Δίνεται η ακολουθία (a_v) με $a_v = 60 - 5v$, $v \in \mathbb{N}^*$.
 - i) Να αποδείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος. Ποια είναι η διαφορά της και ποιος ο πρώτος όρος της ;
 - ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα των θετικών όρων της.
 - iii) Ποιος είναι ο πρώτος αρνητικός όρος της ;
2. Το άθροισμα των v πρώτων όρων μιας ακολουθίας είναι $S_v = 4v^2 - 3v$, $v \in \mathbb{N}^*$.
 - i) Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.
 - ii) Υπολογίστε το άθροισμα των v επόμενων όρων της ακολουθίας.
3. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $a_{10} = 42$ και $a_{19} = 87$. Να βρείτε το άθροισμα των 11 πρώτων τριψηφίων όρων της.
4. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $a_2 = 77$ και $a_{21} = 20$. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με -97 ;
5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

- i) $1+2+3+\dots+v$
- ii) $2+4+6+\dots+2(v+3)$
- iii) $1+3+5+\dots+(2v+5)$
- iv) $10+13+16+\dots+(3v+1)$
- v) των πρώτων 200 περιπτώσεων αριθμών

6. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

a_1	ω	v	a_v	S_v
120	-10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	-8	

7. Δίνονται οι αριθμοί a , β . Μεταξύ αυτών να παρεμβάλετε v αριθμούς , ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
8. Αν a , β , γ είναι θετικοί αριθμοί και οι a^2 , β^2 , γ^2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $\frac{1}{\beta + \gamma}$, $\frac{1}{\alpha + \gamma}$, $\frac{1}{\alpha + \beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
9. Αν a_1 , β_1 , γ_1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου καθώς και οι a_2 , β_2 , γ_2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το σύστημα
$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y = \gamma_1 \\ a_2x + \beta_2y = \gamma_2 \end{cases}$$
 έχει μοναδική λύση, την $(x=-1, y=2)$.
10. Τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 15 , ενώ το γινόμενο τους είναι 80. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.
11. Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς, ώστε να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με άθροισμα 32 και γινόμενο 1680.

12. Ορθογωνίου τριγώνου οι πλευρές του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και η περίμετρός του είναι 30. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.
13. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_1=256$ και $a_{v+1}=a_v/2$.
- Δείξτε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος. Ποιος είναι ο λόγος της;
 - Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων της που είναι μεγαλύτεροι του 1.
 - Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων της που είναι μικρότεροι του 1.
14. Αν το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι $S_n=3(2^n-1)$ να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της και ποιος ο λόγος της;
15. Σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $a_3=12$ και $a_6=96$. Να βρείτε το άθροισμα των πόσοι όροι της δεν είναι μεγαλύτεροι του 768. Υπολογίστε το άθροισμα των όρων αυτών.
16. Ποιος όρος της γεωμετρικής προόδου με $a_4=24$ και $a_6=96$, ισούται με 768 ;
17. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:
- $2+8+32+\dots+8192$
 - $4-2+1-1/2+\dots$
 - $1+a+a^2+\dots+a^{v-1}$
 - $1+a^2+a^4+a^6+\dots+a^{2(v-1)}$
 - $1+a^2+a^4+a^6+\dots+a^{2v+2}$
 - $4+2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+\dots$
 - $\frac{x-2}{x} + \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-2}{x^3} + \dots$ (με $|x|>1$)
18. Το άθροισμα των πρώτων τριών όρων γεωμετρικής προόδου είναι -13 και το γινόμενό τους -27 . Να βρείτε τους όρους αυτούς.
19. Να γράψετε τον περιοδικό αριθμό $\overline{0,514}$ στην μορφή μ/ν (μ, ν φυσικοί αριθμοί)

20. Αν ισχύει $\frac{x}{x+y} = \frac{x-y}{x-\omega}$, δείξτε ότι οι αριθμοί x, y, ω είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
21. Αν x, y, ω είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου δείξτε ότι: $\frac{(x+y)^2}{(y+\omega)^2} = \frac{x}{\omega}$.
22. ι) Δείξτε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ (ο β λέγεται αρμονικός μέσος)
- ιι) Αν είναι A, B, Γ ο αριθμητικός, ο γεωμετρικός και ο αρμονικός μέσος αντίστοιχα, τότε δείξτε ότι:
- 1) οι A, B, Γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- 2) $A \geq B \geq \Gamma$
- 23.