Ακολουθίες

Αριθμητική – Γεωμετρική Πρόοδος

Μία συνάρτηση α με πεδίο ορισμού το N^* λέγεται **ακολουθία** και συμβολίζεται με (α_ν) δηλ.

$$a : N^* \to R : \nu \to \alpha_\nu = \alpha(\nu)$$

Ο α_1 λέγεται πρώτος όρος της ακολουθίας , ο α_2 δεύτερος όρος , … , ο α_ν λέγεται ν-ιοστός όρος της ακολουθίας.

Μία ακολουθία περιγράφεται συνήθως

- Με τον **τύπο** της , π.χ $\alpha_\nu=2\nu^2+1$ ή
- Με τον **αναδρομικό της τύπο**, δηλ. μία σχέση που συνδέει κάποιον όρο με προηγούμενους όρους, αρκεί να δίνονται κάποιοι αρχικοί όροι ώστε να μπορούν να προκύπτουν όλοι οι όροι της ακολουθίας π.χ. $\alpha_{\nu+2}=2\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ με $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=3$, $\nu\in N^*$.

Σχόλιο : Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας δεν είναι «συνεχόμενη» γραμμή , αλλά σύνολο μεμονωμένων σημείων που βρίσκονται στο 1^0 ή 4^0 τεταρτημόριο (λόγω του πεδίου ορισμού της).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Ορισμός : **Αριθμητική Πρόοδος** λέγεται μία ακολουθία με αναδρομικό τύπο $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega$, $\nu\in N^*$, όπου ω σταθερός αριθμός (:λέγεται διαφορά της Α.Π) δηλ. η Α.Π είναι μια ακολουθία όπου κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε σταθερού αριθμού ω.	Ορισμός : **Γεωμετρική Πρόοδος** λέγεται μία ακολουθία με αναδρομικό τύπο $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda$, $\nu\in N^*$, όπου $\lambda \neq 0$ σταθερός αριθμός (:λέγεται λόγος της Γ.Π) και $\alpha_1 \neq 0$ δηλ. η Γ.Π είναι μια ακολουθία όπου κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντοτε σταθερού αριθμού $\lambda \neq 0$.
$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega$ για κάθε $\nu\in N^*$	$\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$ για κάθε $\nu\in N^*$
Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι Α . Π αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ (ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ)	Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι Γ . Π αν και μόνο αν $\boldsymbol{\beta^2=\alpha\cdot\gamma}$ (ο $\beta = \sqrt{\alpha\cdot\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ)
Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων Α . Π είναι : $S_\nu = \frac{a_1+a_\nu}{2}\cdot\nu = \frac{2\alpha_1+(\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu$	Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων Γ . Π με $\lambda \neq 1$ είναι : $S_\nu = \alpha_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$ και

Aris Nikolaidis

	$S_\nu=\nu\cdot\alpha_1$, αν λ=1
Παρατηρήσεις : 1. Το άθροισμα των συμμετρικών όρων μιας Α.Π παραμένει ίδιο δηλ. $\alpha_1+\alpha_\nu=\alpha_2+\alpha_{\nu-1}=\alpha_3+\alpha_{\nu-2}=....$ 2. Όταν δίνεται μια ακολουθία και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι Α.Π αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά δύο οποιονδήποτε διαδοχικών όρων της παραμένει σταθερή δηλ. $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=......=$σταθ.	Παρατηρήσεις : 1. Το γινόμενο των συμμετρικών όρων μιας Γ.Π παραμένει ίδιο δηλ. $\alpha_1\cdot\alpha_\nu=\alpha_2\cdot\alpha_{\nu-1}=\alpha_3\cdot\alpha_{\nu-2}=....$ 2. Όταν δίνεται μια ακολουθία και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι Γ.Π αρκεί να δείξουμε ότι ο λόγος δύο οποιονδήποτε διαδοχικών όρων της παραμένει σταθερός δηλ. $\alpha_{\nu+1}/\alpha_\nu=......=$σταθ.

Μία ακολουθία λέγεται **Αρμονική Πρόοδος** αν και μόνο αν οι αντίστροφοι των όρων της αποτελούν **αριθμητική πρόοδο** , δηλ. η ακολουθία α_1 , α_2 , … , α_ν είναι αρμονική πρόοδος αν και μόνο αν η ακολουθία $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$, … , $1/\alpha_\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Ασκήσεις:

1. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu=60-5\nu$, $\nu\in N^*$.
   i) Να αποδείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος. Ποια είναι η διαφορά της και ποιος ο πρώτος όρος της ;
   ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα των θετικών όρων της.
   iii) Ποιος είναι ο πρώτος αρνητικός όρος της ;

2. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας είναι $S_\nu=4\nu^2-3\nu$, $\nu\in N^*$.
   ι) Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.
   ιι) Υπολογίστε το άθροισμα των ν επόμενων όρων της ακολουθίας.

3. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_{10}=42$ και $\alpha_{19}=87$. Να βρείτε το άθροισμα των 11 πρώτων τριψήφιων όρων της.

4. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2=77$ και $\alpha_{21}=20$. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με –97 ;

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

ι) 1+2+3+…+ν

ιι) 2+4+6+…+2(ν+3)

ιιι) 1+3+5+…+(2ν+5)

ιν) 10+13+16+…+(3ν+1)

ν) των πρώτων 200 περιττών αριθμών

6. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

a_1	ω	ν	$a_ν$	$S_ν$
120	-10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	-8	

7. Δίνονται οι αριθμοί α , β. Μεταξύ αυτών να παρεμβάλετε ν αριθμούς , ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

8. Αν α , β , γ είναι θετικοί αριθμοί και οι $α^2$, $β^2$, $γ^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $\frac{1}{\beta+\gamma}, \frac{1}{α+γ}, \frac{1}{α+β}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

9. Αν $α_1$, $β_1$, $γ_1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου καθώς και οι $α_2$, $β_2$, $γ_2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} a_1x+\beta_1y=\gamma_1 \\ a_2x+\beta_2y=\gamma_2 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση, την (χ=-1 , y=2).

10. Τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 15 , ενώ το γινόμενό τους είναι 80. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

11. Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς, ώστε να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με άθροισμα 32 και γινόμενο 1680.

12. Ορθογωνίου τριγώνου οι πλευρές του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και η περίμετρός του είναι 30. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

13. Δίνεται η ακολουθία ($α_ν$) με $α_1=256$ και $α_{ν+1}=α_ν/2$.

ι) Δείξτε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος. Ποιος είναι ο λόγος της;

ιι) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων της που είναι μεγαλύτεροι του 1.

ιιι) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων της που είναι μικρότεροι του 1.

14. Αν το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας ($α_ν$) είναι $S_ν=3(2^ν-1)$ να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της και ποιος ο λόγος της;

15. Σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $α_3=12$ και $α_6=96$. Να βρείτε το άθροισμα των πόσοι όροι της δεν είναι μεγαλύτεροι του 768. Υπολογίστε το άθροισμα των όρων αυτών.

16. Ποιος όρος της γεωμετρικής προόδου με $α_4=24$ και $α_6=96$, ισούται με 768 ;

17. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

ι) 2+8+32+…+8192

ιι) 4-2+1-1/2+…

ιιι) $1+α+α^2+…+α^{ν-1}$

ιv) $1+α^2+α^4+α^6+…α^{2(ν-1)}$

ιv) $1+α^2+α^4+α^6+…α^{2ν+2}$

v) $4+2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}$ +…

vι) $\frac{x-2}{x}+\frac{x-2}{x^2}+\frac{x-2}{x^3}+\ldots$ (με |χ|>1)

18. Το άθροισμα των πρώτων τριών όρων γεωμετρικής προόδου είναι –13 και το γινόμενό τους –27. Να βρείτε τους όρους αυτούς.

19. Να γράψετε τον περιοδικό αριθμό $\overline{0,514}$ στην μορφή μ/ν (μ , ν φυσικοί αριθμοί)

20. Αν ισχύει $\frac{x}{x+y}=\frac{x-y}{x-\omega}$, δείξτε ότι οι αριθμοί x ,y ,ω είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

21. Αν x , y ,ω είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου δείξτε ότι: $\frac{(x+y)^2}{(y+\omega)^2}=\frac{x}{\omega}$.

22. ι) Δείξτε ότι οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ (ο β λέγεται αρμονικός μέσος)

ιι) Αν είναι Α , Β , Γ ο αριθμητικός , ο γεωμετρικός και ο αρμονικός μέσος αντίστοιχα, τότε δείξτε ότι:

1) οι Α , Β , Γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

2) Α $\geq$ Β $\geq$ Γ

23.